МОДУЛИ НАД КОЛЬЦОМ ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ ГРУППЫ

Царев А.В.
Московский педагогический государственный университет

УДК 512.541+512.553.3

Ключевые слова: абелева группа, факторно делимая группа, кольцо псевдорациональных чисел, псевдорациональный ранг, модуль псевдорациональных отношений.

Аннотация

В работе найдены структурные теоремы для некоторых классов модулей над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимых смешанных групп.

Введение

Кольцо псевдорациональных чисел и модули над ним впервые были рассмотрены Фоминым А. А. в [2] и Крыловым П. А. в [12] и [13]. Позднее в [3] и [4] Фомин использовал эти модули для изучения факторно делимых смешанных групп и групп без кручения конечного ранга. А в [12] Крылов использовал модули над кольцом псевдорациональных чисел для изучения так называемых sp-групп.

Многие важные группы являются аддитивными группами модулей над кольцом псевдорациональных чисел. К классическим примерам таких групп, рассмотренным в [1], относятся делимые, алгебраически компактные и группы с π-регулярными кольцами эндоморфизмов. Другой важный пример это смешанные группы, лежащие между суммой и произведением своих p-компонент (sp-группы). [5] — [12] составляет далеко не полный список работ, посвященных sp-группам.

Помимо [2], модули над кольцом псевдорациональных чисел рассматривались в [14], где были описаны инъективные модули, а также в [13], где были описаны идеалы кольца псевдорациональных чисел и решены некоторые вопросы, касающиеся колец эндоморфизмов и групп гомоморфизмов sp-групп.

Данную работу можно условно разделить на три части. К первой части относятся параграфы 1 и 2, в которых вводятся основные рабочие понятия и свойства, связанные с модулями над кольцом псевдорациональных чисел. Вторую часть составляют параграфы 3 и 4. В них рассматривается строение некоторых классов конечно порожденных модулей. Основными результатами этой части являются теоремы 3 и 4, а также следствия 2 и 4. В заключительной части (параграф 5) рассматривается взаимосвязь модулей над кольцом псевдорациональных чисел с факторно делимыми смешанными группами и группами без кручения конечного ранга.

Всюду далее Z, Q и $\widehat{Z}_p$ — обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно, а также их аддитивных групп. $Z(m)$ — кольцо классов вычетов по модулю m. P — множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Через $r(G)$ будем обозначать ранг без кручения группы G и называть его просто рангом, через $r^*(M)$ — псевдорациональный ранг R-модуля M. Периодическую часть группы G будем обозначать $t(G)$. Остальные понятия и обозначения стандартны и соответствуют [1].

§ 1 Кольцо псевдорациональных чисел

Рассмотрим подкольцо в кольце $\widehat{Z} = \prod\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$, сервантно порожденное идеалом $\bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ и единицей кольца.

Определение 1. [2] *Кольцо* $R = \left\langle 1, \bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p \right\rangle_*$ *называется кольцом псевдорациональных чисел.*

Рассмотрим также конструкции ряда других колец, приведенные в работах [2] и [13]. Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика, $K_p = Z/p^{m_p}Z$ или $K_p = \widehat{Z}_p$, при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$ соответственно. Если χ содержит бесконечно много ненулевых элементов, то рассмотрим подкольцо $R_\chi = \langle 1, \bigoplus\limits_{p\in P} K_p\rangle_*$ кольца $\prod\limits_{p\in P} K_p$. Если все p-компоненты χ, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то рассмотрим кольца $K_\chi = K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$ и $R_\chi = Q \oplus K_\chi$. Заметим, что если $\chi = (\infty)$, то кольцо R_χ есть в точности кольцо псевдорациональных чисел, а если характеристика χ почти нулевая, то K_χ — кольцо классов вычетов по некоторому модулю m.

Рассмотрим некоторые свойства колец R_χ, приведенные в [2].

Свойства.

1^0. *Элемент* $r = (\alpha_p) \in \prod\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ *принадлежит кольцу* R *тогда и только тогда, когда существует рациональное число* $|r| = m/n$ *такое, что* $n\alpha_p = m$ *почти при всех простых* p.

2^0. *Рациональное число* $|r|$, *определенное в* 1^0 *для числа* $r \in R$, *единственно.*

3^0. *Элементы вида* $\varepsilon_p = (0, \dots, 0, 1_p, 0, \dots)$ *являются идемпотентами кольца* R. *Более того, любой идемпотент кольца* R *имеет вид* $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}$ *или* $1 - \varepsilon$.

4^0. *$T = \bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ является максимальным идеалом кольца псевдорациональных чисел (причем $R/T \cong Q$) и состоит из всех таких $r \in R$, что $|r| = 0$.*

5^0. *Эпиморфные образы кольца R_χ имеют вид R_φ или K_φ, где $\chi \geqslant \varphi$.*

Далее мы рассмотрим некоторые инварианты и свойства модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 2. [2] *R-модуль M называется делимым, если его аддитивная группа делимая без кручения и при этом $rm = |r|m$ для любых $r \in R$ и $m \in M$. Если R-модуль не содержит делимых подмодулей, то он называется редуцированным.*

Теорема 1. [2] *Для произвольного R-модуля M справедливо:*
1. Модуль M либо редуцированный, либо содержит наибольший делимый подмодуль $divM$;
2. $divM = \{m \in M \mid tm = 0$ для любого $t \in T\}$;
3. $divM$ выделяется прямым слагаемым в M. ■

Теорема 2. [2] *Если M — произвольный R-модуль, то множество*

$$TM = \{tm \mid t \in T, m \in M\}$$

является подмодулем модуля M, причем $TM = \bigoplus\limits_{p\in P} M_p$, где $M_p = \varepsilon_p M$. ■

Пусть M — произвольный конечно порожденный R-модуль с системой образующих $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда, очевидно, что $\widehat{Z}_p$-модуль $M_p = \varepsilon_p M$ порождается элементами $\{\varepsilon_p x_1, \ldots, \varepsilon_p x_n\}$. Конечно порожденный p-адический модуль M_p представим в виде прямой суммы циклических $\widehat{Z}_p$-модулей:

$$M_p = \langle a_1 \rangle_{\widehat{Z}_p} \oplus \cdots \oplus \langle a_n \rangle_{\widehat{Z}_p},$$

где некоторые слагаемые могут быть нулевыми.

Циклический $\widehat{Z}_p$-модуль изоморфен или $Z/p^{k_{ip}}Z$, где k_{ip} — целое неотрицательное число, или $\widehat{Z}_p$. Следовательно, изоморфизм

$$M_p \cong Z(p^{k_{1p}}) \oplus \cdots \oplus Z(p^{k_{tp}}) \oplus \bigoplus_{s} \widehat{Z}_p \quad (t + s = n),$$

определяет следующую упорядоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞

$$0 \leqslant k_{1p} \leqslant \cdots \leqslant k_{np} \leqslant \infty, \tag{1}$$

где последние s членов есть символы ∞ $(0 \leqslant s \leqslant n)$. Последовательность (1) по всем простым p определяет последовательность характеристик. Несколько первых характеристик могут быть нулевыми, если их отбросить, то получим последовательность

$$\chi_1 \leqslant \cdots \leqslant \chi_k. \tag{2}$$

Множество характеристик (2) будем называть *обобщенной характеристикой* конечно порожденного R-модуля M.

Определение 3. [2] *Псевдорациональным рангом R-модуля M называется* $\dim_Q\big(M/TM\big)$ *— размерность фактормодуля M/TM, рассматриваемого в качестве векторного пространства над полем $Q \cong R/T$.*

Свойства.

6^0. *Если $M =< x_1, \dots, x_n >_R$, то $r^*(M) \leqslant n$.*

7^0. *Если N — подмодуль R-модуля M, то $r^*(N) \leqslant r^*(M)$.*

Так как $N \subset M$ и $TN \subset TM$, то существует мономорфизм из векторного пространства N/TN в M/TM, и значит, $dim_Q(N/TM) \leqslant dim_Q(M/TM)$.

8^0. *Если N — подмодуль R-модуля M, то $r^*(M) = r^*(M/N) + r^*(N)$.*

Так как $T(M/N) = TM/TN$ и $(M/N)/(TM/TN) \;\cong\; (M/TM)/(N/TN)$, то

$$r^*(M) = dim_Q((M/N)/(TM/TN)) + dim_Q(N/TN) = r^*(M/N) + r^*(N).$$

9^0. *Если M — R-модуль локально свободной обобщенной характеристики (в ней нет символов ∞), то $r^*(M) = r(M)$.*

Если M — R-модуль локально свободной обобщенной характеристики, то $TM = t(M)$, следовательно, $r^*(M) = r(M/t(M)) = r(M)$.

§ 2 Модуль псевдорациональных отношений

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — произвольная система элементов R-модуля M. Рассмотрим множество

$$\Delta M_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \dots + r_nx_n = 0\},$$

которое, очевидно, является R-модулем. Если X — система образующих в M, то ΔM_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* модуля M.

Предложение 1. *Пусть M и L — произвольные модули над кольцом R. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих в M, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — произвольные элементы из L, то гомоморфизм $f : M \to L$, такой, что $f(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, существует тогда и только тогда, когда $\Delta M_X \subseteq \Delta L_Y$.*

Доказательство. Покажем необходимость условий. Рассмотрим гомоморфизм $f : M \to L$, такой что $f(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Если $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$, то $r_1x_1 + \dots + r_nx_n = 0$, следовательно,

$$f(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) = r_1y_1 + \dots + r_ny_n = 0.$$

Таким образом, $\Delta M_X \subseteq \Delta L_Y$.

Покажем достаточность условий теоремы. Пусть $\Delta M_X \subseteq \Delta L_Y$, построим гомоморфизм $f : M \to L$, такой, что $f(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Рассмотрим соответствие $f : M \to L$, по закону

$$f(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) = r_1y_1 + \cdots + r_ny_n.$$

Пусть $g = r_1x_1+\cdots+r_nx_n = s_1x_1+\cdots+s_nx_n$ — два произвольных представления элемента $g \in M$. Тогда

$$(r_1 - s_1)x_1 + \cdots + (r_n - s_n)x_n = 0,$$

т. е. $((r_1 - s_1), \ldots, (r_n - s_n)) \in \Delta M_X$. Тогда из условия следует, что

$$(r_1 - s_1)y_1 + \cdots + (r_n - s_n)y_n = 0,$$

и значит,

$$f(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) = r_1y_1 + \cdots + r_ny_n = s_1y_1 + \cdots + s_ny_n = f(s_1x_1 + \cdots + s_nx_n).$$

Таким образом, f — отображение. Очевидно, что f сохраняет операции, т. е. f — гомоморфизм.

Так как $f(x_i) = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то f — искомый гомоморфизм. ■

Следствие 1. *Пусть M и L — произвольные конечно порожденные R-модули. Они изоморфны тогда и только тогда, когда у них существуют равные модули псевдорациональных отношений.* ■

Предложение 2. *Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — система образующих R-модуля M, то*

$$n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : R^n \to M$, по закону

$$\varphi(r_1, \ldots, r_n) = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n.$$

Легко видно, что φ — гомоморфизм. А так как X — система образующих R-модуля M, то φ — эпиморфизм. Заметим, что

$$(r_1, \ldots, r_n) \in \ker\varphi \Leftrightarrow r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0,$$

т. е. $\ker\varphi = \Delta M_X$, следовательно,

$$M \cong R^n/\Delta M_X \text{ и } n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X). ■$$

§ 3 Модули псевдорационального ранга 1

Лемма 1. *Если M — циклический R-модуль, то $r^*(M) = 1$ или $r^*(M) = 0$. Причем, в первом случае $M \cong R_\chi$, где χ — произвольная характеристика, а во втором случае $M \cong K_\varphi$, где φ — почти нулевая характеристика.*

Доказательство. Пусть $M = \langle x \rangle_R$, тогда отображение $\varphi : R \to M$ по закону $\varphi(r) = rx$, очевидно, является эпиморфизмом, причем $\ker \varphi$ является идеалам кольца R. Таким образом, модуль M изоморфен эпиморфному образу кольца R, т. е. как указано выше $M \cong R_\chi$ или $M \cong K_\varphi$.

Так как $r^*(R_\chi) = 1$ и $r^*(K_\varphi) = 0$, то верно и второе утверждение леммы. ■

Лемма 2. *Если $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle_R$ — произвольный конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 1, то в M можно выбрать такую систему образующих $\{s_1, t_2, \dots, t_n\}$, что $s_1 \notin TM$, а $t_2, \dots, t_n \in TM$.*

Доказательство. Введем новые обозначения:

$$m_{i_1} = s_1 \notin TM, \; \dots, \; m_{i_k} = s_k \notin TM;$$

$$m_{i_{k+1}} = t_{k+1} \in TM, \; \dots, \; m_{i_n} = t_n \in TM.$$

Так как

$$M/TM = \langle s_1 + TM, \dots, s_k + TM, t_{k+1} + TM, \dots, t_n + TM \rangle_Q =$$

$$= \langle s_1 + TM, \dots, s_k + TM \rangle_Q \;\text{ и }\; \dim_Q M/TM = 1,$$

то $k \geqslant 1$. M/TM — одномерное векторное пространство над Q, следовательно, любые два элемента из M зависимы по модулю TM, в том смысле, что если $l, m \notin TM$, то $l = rm + t$, где $r \in R$, $t \in TM$. Тогда можно записать:

$s_1 = s_1;$
$s_2 = r_2 s_1 + t_2$, где $r_2 \in R$, $t_2 \in TM$;
....
$s_k = r_k s_1 + t_k$, где $r_k \in R$, $t_k \in TM$.

Отсюда следует, что $M = \langle s_1, \dots, s_k, t_{k+1}, \dots, t_n \rangle_R = \langle s_1, t_2, \dots, t_n \rangle_R$. ■

Теорема 3. *Если M — произвольный конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 1, то*

$$M \cong R_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \dots \oplus K_{\chi_m},$$

где характеристики $\chi_2, \dots, \chi_m$ почти нулевые, а χ_1 — любая.

Доказательство. Пусть M — произвольный R-модуль псевдорационального ранга 1. Из леммы 2 следует, что $M = \langle s_1, t_2, \dots, t_n \rangle_R$, где $s_1 \notin TM$, а $t_2, \dots, t_n \in TM$. Тогда

$$M = \langle s_1, t_2, \dots, t_n \rangle_R = \langle s_1 \rangle_R + \langle t_2, \dots, t_n \rangle_R = Rs_1 + S,$$

где $S = \langle t_2, \dots, t_n \rangle_R \subseteq TM$. Более того, так как $t_2, \dots, t_n \in TM$, то найдется такой идемпотент $\varepsilon \in R$, что $S = \langle t_2, \dots, t_n \rangle_R \subseteq \varepsilon M$. Тогда

$$M = ((1 - \varepsilon)Rs_1 + \varepsilon Rs_1) + S =$$

$$= (1-\varepsilon)Rs_1 + (\varepsilon Rs_1 + S) = (1-\varepsilon)Rs_1 + S_1,$$

где $S_1 = \varepsilon Rs_1 + S$. Так как εRs_1 и S содержатся в εM, то $S_1 \subseteq \varepsilon M$, а так как $(1-\varepsilon)Rs_1 \bigcap \varepsilon M = 0$, то и $(1-\varepsilon)Rs_1 \bigcap S_1 = 0$. Следовательно,

$$M = (1-\varepsilon)Rs_1 \oplus S_1.$$

Rs_1 — циклический R-модуль псевдорационального ранга 1, значит, он изоморфен R_χ. Тогда $(1-\varepsilon)Rs_1 \cong (1-\varepsilon)R_\chi = R_{\chi_1}$.

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \cdots + \varepsilon_{p_t}$. Рассмотрим R-модуль S_1. Для него построим отображения $\pi_i : S_1 \to \varepsilon_{p_i} S_1$ по закону $\pi_i(s) = \varepsilon_{p_i} s$ для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Они удовлетворяют условиям:

а) $\pi_i \pi_j = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \pi_i, & \text{при } i = j; \end{cases}$

б) для любого $s \in S_1$, $s = \varepsilon s = \varepsilon_{p_1} s + \cdots + \varepsilon_{p_t} s = \pi_{p_1}(s) + \cdots + \pi_{p_t}(s)$.

Тогда $S_1 = \pi_{p_1}(S_1) \oplus \cdots \oplus \pi_{p_t}(S_1) = \varepsilon_{p_1} S_1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{p_t} S_1$.

Так как $\varepsilon_{p_i} R_{\chi_1} = 0$ для любого $i \in \{1, \ldots, t\}$, то

$$\varepsilon_{p_i} S_1 = \varepsilon_{p_i} TM = M_{p_i} \cong K_{2p_i} \oplus \cdots \oplus K_{mp_i},$$

где каждое K_{jp_i} изоморфно либо $Z(p_i^{k_j})$, либо $\widehat{Z}_{p_i}$. Следовательно,

$$S_1 \cong \bigoplus_{i=1}^{t} K_{2p_i} \oplus \cdots \oplus \bigoplus_{i=1}^{t} K_{mp_i} \cong K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_m}.$$

Таким образом, $M \cong R_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_m}$. ■

Заметим, что R-модуль S_1 из доказательства теоремы 3 имеет псевдорациональный ранг 0, и больше на него никаких специальных условий не накладывается. Т. е. его можно считать произвольным R-модулем псевдорационального ранга 0. Тогда, учитывая полученное для S_1 разложение, справедливо

Следствие 2. *Если M — произвольный конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 0, то*

$$M \cong K_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_m},$$

где $\chi_1, \ldots, \chi_m$ — последовательность почти нулевых характеристик. ■

Следствие 3. *Обобщенная характеристика составляет полную и независимую систему инвариантов в классах конечно порожденных R-модулей псевдорационального ранга 0 и 1.* ■

§ 4 Условия разложимости некоторых R-модулей

Пусть M — произвольный конечно порожденный R-модуль. Наименьшее количество порождающих элементов модуля M будем обозначать $\rho(M)$. Очевидно, что $\rho(M) \geqslant r^*(M)$.

Теорема 4. *Если обобщенная характеристика конечно порожденного редуцированного R-модуля M состоит из равных характеристик $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, и их число равно $\rho(M)$, то*

$$M \cong R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n} \;\; \textit{или} \;\; M \cong K_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_n}.$$

Доказательство. Пусть M — конечно порожденный R-модуль, последовательность $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ — его обобщенная характеристика, причем

$$\chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_n = \chi \;\text{ и }\; n = \rho(M).$$

Рассмотрим два случая.

1-й случай. Характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых элементов. Пусть $P_1 = \{p \in P \mid \chi_p \neq 0\}$. Так как $\rho(M) = n$, то в M существует такая система элементов $\{x_1, \ldots, x_n\}$, что $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_R = M$. Рассмотрим произвольную комбинацию

$$r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n = 0, \;\text{ где }\; r_1, \ldots, r_n \in R. \tag{1}$$

Для каждого простого p она индуцирует комбинацию

$$\alpha_{p1}\varepsilon_p x_1 + \cdots + \alpha_{pn}\varepsilon_p x_n = 0, \;\text{ где }\; \alpha_{p1} = \varepsilon_p r_1, \ldots, \alpha_{pn} = \varepsilon_p r_n. \tag{2}$$

Учитывая условия на тип Ричмана, получаем:

$$\langle \varepsilon_p x_1, \ldots, \varepsilon_p x_n \rangle_{\widehat{Z}_p} = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi_p = 0 \\ \bigoplus\limits_n Z(p^{m_p}), & \text{если } 0 < \chi_p = m_p < \infty \\ \bigoplus\limits_n \widehat{Z}_p, & \text{если } \chi_p = \infty \end{cases} \tag{3}$$

Тогда из (2) и (3) следует

$$\chi_p = \infty \Rightarrow \alpha_{p1} = \cdots = \alpha_{pn} = 0 \;\text{ и }\; \chi_p = m_p \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_{p1}, \ldots, \alpha_{pn} \in p^{m_p}\widehat{Z}_p.$$

Если в характеристике χ содержится бесконечно много символов ∞, то числа $r_1, \ldots, r_n$ из комбинации (1) содержат бесконечно много нулевых p-компонент, а значит, в силу свойств 1^0 и 2^0 кольца псевдорациональных чисел лежат в идеале T.

Если характеристика χ содержит конечное число символов ∞, то она содержит бесконечно много натуральных p-компонент. Пусть $P_2 = \{p \in P \mid \chi_p \in \mathbb{N}\}$. Так как псевдорациональное число r делится на простое p тогда и только тогда, когда $\varepsilon_p r$ делится на p, то числа $r_1, \ldots, r_n$ делятся на p при любом $p \in P_2$. Но псевдорациональное число имеет бесконечно много простых делителей только когда оно лежит в T. Следовательно, $r_1, \ldots, r_n \in T$.

Таким образом, получили, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ независимы по модулю TM, а значит, $r^*(M) = n$. Тогда из предложения 2 следует, что $r^*(\Delta M_X) = 0$ и

$$\Delta M_X = \bigoplus_{p \in P} \varepsilon_p \Delta M_X = \bigoplus_{p \in P} K_p, \tag{4}$$

где $K_p = \bigoplus\limits_n p^{m_p} \widehat{Z}_p$ или $K_p = 0$, при $\chi_p = m_p < \infty$ или $\chi_p = \infty$ соответственно.

Рассмотрим R-модуль $L = R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n}$. Возьмем в нем систему элементов $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, где

$$y_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ y_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ y_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Очевидно, что Y — система образующих модуля L, причем $\Delta L_Y = \Delta M_X$. Тогда по следствию 1 модули M и L изоморфны.

2-й случай. Характеристика χ почти нулевая. Тогда $r^*(M) = 0$, а значит, M задается своей обобщенной характеристикой, т. е. $M \cong K_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_n}$. ■

Следствие 4. *Если обобщеная характеристика конечно порожденного редуцированного R-модуля M состоит из характеристик $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, отличающихся только конечным числом мест, и их число равно $\rho(M)$, то*

$$M \cong R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n} \ \text{ или } \ M \cong K_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_n}.$$

Доказательство. Если R-модуль M удовлетворяет условиям следствия, то найдется такой идемпотент $(1 - \varepsilon)$ кольца R, что модуль $(1 - \varepsilon)M$ будет удовлетворять условиям теоремы 4. Если $(1 - \varepsilon)M = 0$, то

$$M = \varepsilon M \cong K_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus K_{\chi_n},$$

а если $(1 - \varepsilon)M \neq 0$, то

$$M = (1 - \varepsilon)M \oplus \varepsilon M \cong R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \cdots \oplus R_{\chi_n}. \blacksquare$$

§ 5 Факторно делимые смешанные группы

В данном параграфе мы рассмотрим категории $\mathcal{QTF}$ и $\mathcal{QD}$, объектами которых являются соответственно группы без кручения конечного ранга и факторно делимые смешанные группы, а морфизмами — квазигомоморфизмы.

В [3] доказано, что категории $\mathcal{QTF}$ и $\mathcal{QD}$ двойственны, а в [4] построена категория $\mathcal{F}$, объектами которой являются конечно порожденные R-модули с выделенной свободной системой образующих, а морфизмами — пара квазигомоморфизмов и доказано, что $\mathcal{F}$ эквивалентна $\mathcal{QD}$. Ниже, мы попробуем использовать «родство» групп из категорий $\mathcal{QTF}$ и $\mathcal{QD}$ с R-модулями для переноса полученных выше результатов.

Определение 4. [3] *Группа G называется факторно делимой, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — периодическая делимая группа.*

Линейно независимую систему элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, порождающую группу F из определения 4, будем называть *фундаментальной системой* факторно делимой группы G, а саму группу F — ее *фундаментальной подгруппой.*

Пусть G — редуцированная факторно делимая смешанная группа. Рассмотрим ее Z-адическое пополнение $\widehat{G}$. Канонический гомоморфизм $\alpha\colon G \to \widehat{G}$ является мономорфизмом, так как $\ker\alpha = \bigcap\limits_{n\in N} nG = G^1 = 0$. Группа $\widehat{G}$ является $\widehat{Z}$-модулем, а значит, и модулем над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 5. [4] *R-модуль $\mathcal{R}(G) = divG \oplus \big\langle\alpha(G)\big\rangle_R$, называется псевдорациональным типом факторно делимой группы G.*

Псевдорациональным рангом факторно делимой группы будем называть псевдорациональный ранг ее псевдорационального типа и обозначать $r^*(G)$,

$$r^*(G) = r^*(\mathcal{R}(G)).$$

Очевидно, что существует естественное вложение $\varphi : G \to \mathcal{R}(G)$, поэтому всюду далее будем отождествлять группу G с ее образом $\varphi(G)$.

Под *обобщенной характеристикой* факторно делимой группы будем подразумевать обобщенную характеристику ее псевдорационального типа.

Теорема 5. *Факторно делимая группа является R-модулем тогда и только тогда, когда она имеет локально свободную обобщенную характеристику.*

Доказательство. Если G — аддитивная группа R-модуля, то

$$G = (1-\varepsilon_p)G \oplus \varepsilon_p G = (1-\varepsilon_p)G \oplus \widehat{G}_p.$$

при любом простом p. В [4] доказано, что $\mathcal{R}(G)$ — конечно порожденный R-модуль, тогда $\widehat{G}_p$ — конечно порожденный $\widehat{Z}_p$-модуль, следовательно, он раскладывается в конечную прямую сумму циклических $\widehat{Z}_p$-модулей. Если $\widehat{G}_p$ не является конечным, то G содержит прямое слагаемое вида $\widehat{Z}_p$, что невозможно, так как из определения 4 следует, что G имеет конечный ранг. Таким образом, $\widehat{G}_p$ — конечная группа при любом простом p, т. е. G имеет локально свободную обобщенную характеристику.

Пусть G — произвольная факторно делимая группа локально свободной обобщенной характеристики. Для доказательства обратного утверждения достаточно показать, что $G = \mathcal{R}(G)$, т. е. $rg \in G$ для любых $r \in R$, $g \in G$.

Из свойства 1^0 кольца псевдорациональных чисел следует, что произвольное число $r \in R$ можно представить в виде:

$$r = (1-\varepsilon)|r| + \varepsilon r,$$

где $|r| = \frac{m}{n} \in Q$, а $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_k}$ — некоторый идемпотент из кольца R, причем все простые делители числа n лежат в множестве $\{p_1, \dots, p_k\}$. Так как G имеет локально свободную обобщенную характеристику, то

$$G = (1-\varepsilon)G \oplus \varepsilon G, \tag{1}$$

где группа $(1-\varepsilon)G$ является p-делимой при любом $p \in \{p_1, \dots, p_k\}$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, для него справедливо:

$$rg = (1-\varepsilon)\frac{m}{n}g + \varepsilon rg. \tag{2}$$

Но по выше показанному элемент $(1-\varepsilon)\frac{m}{n}g$ лежит в $(1-\varepsilon)G$, а εrg в εG. Таким образом, из (1) и (2) следует, что $rg \in G$, и значит, $G = \mathcal{R}(G)$. ■

Отметим, что в [2] доказано, что класс факторно делимых групп локально свободной обобщенной характеристики совпадает с хорошо известным классом $\mathcal{G}$ — самомалых групп конечного ранга без кручения, введенным С. Глаз (S. Glaz) и У. Уиклессом (W. Wickless) в [6].

Из теоремы 5, свойства 9^0 и теоремы 3 получаем следствия.

Следствие 5. *Если G — факторно делимая группа локально свободной обобщенной характеристики, то $r^*(G) = r(G)$.* ■

Следствие 6. *Если G — факторно делимая группа локально свободной обобщенной характеристики, то G имеет псевдорациональный ранг 1 тогда и только тогда, когда $G \cong R_\chi$, где χ — некоторая характеристика, не содержащая бесконечных p-компонент.* ■

Следствие 7. *Если редуцированная часть факторно делимой группы G локально свободной обобщенной характеристики имеет псевдорациональный ранг 1, то*

$$G \cong R_{\chi_1} \oplus R_{\chi_2} \oplus \dots \oplus R_{\chi_n},$$

где характеристики $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ не содержат символов ∞, причем характеристика χ_1 содержит бесконечно много ненулевых элементов, а характеристики $\chi_2, \dots, \chi_n$ почти нулевые. ■

Пусть G — произвольная факторно делимая группа, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$ — ее фундаментальная подгруппа. Для G рассмотрим два множество:

$$\nabla G_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \dots + r_nx_n \in G\};$$

$$\Delta G_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \dots + r_nx_n = 0\}.$$

Очевидно, что ∇G_X является группой, а ΔG_X – модулем над кольцом псевдорациональных чисел, и $\Delta G_X \subset \nabla G_X$. Модуль ΔG_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* факторно делимой группы G.

Лемма 3. *Если G — факторно делимая смешанная группа, то*

$$G \cong \nabla G_X / \Delta G_X.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : \nabla G_X \to G$ по закону

$$\varphi(r_1, \ldots, r_n) = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n.$$

Данное отображение, очевидно, является эпиморфизмом, ядро которого совпадает с ΔG_X, следовательно, по теореме о гомоморфизме $G \cong \nabla G_X / \Delta G_X$. $\blacksquare$

Теорема 6. [4] *Если H — редуцированный R-модуль, или G — делимый R-модуль, то $Hom_Z(G, H) = Hom_R(G, H)$.* $\blacksquare$

Лемма 4. *Пусть G и H — некоторые факторно делимые смешанные группы, причем H — редуцированная группа, или G — делимая. $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$ — фундаментальная подгруппа группы G, $\varphi : G \to H$ — произвольный гомоморфизм, тогда, если*

$$g = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n \in G, \quad r_1, \ldots, r_n \in R,$$

то $\varphi(g) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_n \varphi(x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1-й случай. G и H — редуцированные группы. Пусть $\widehat{G}$ и $\widehat{H}$ — Z-адические пополнения групп G и H, тогда существует единственный гомоморфизм φ^* такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ \widehat{G} & \xrightarrow{\varphi^*} & \widehat{H}. \end{array}$$

Здесь отображения μ и ν являются мономорфизмами, поэтому можно считать, что $G \subset \widehat{G}$ и $H \subset \widehat{H}$. Так как $\widehat{G}$ и $\widehat{H}$ — редуцированные R-модули, то, применив теорему 6, получим:

$$\varphi(g) = \varphi(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = \varphi^*(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) =$$

$$= r_1 \varphi^*(x_1) + \cdots + r_n \varphi^*(x_n) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_n \varphi(x_n).$$

2-й случай. G и H — делимые группы без кручения, тогда они являются делимыми R-модулями, и следовательно, по теореме 6

$$\varphi(g) = \varphi(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_n \varphi(x_n).$$

3-й случай. G — делимая группа и $H = D \oplus H_1$, где D — делимая группа без кручения, а H_1 — редуцированная. Так как $Hom(G, H) = Hom(G, D)$, то данный случай сводится к случаю 2.

4-й случай. H — редуцированная группа и $G = D \oplus G_1$, где D — делимая группа, а G_1 — редуцированная. Так как $Hom(G, H) = Hom(G_1, H)$, то данный случай сводится к случаю 1. $\blacksquare$

Предложение 3. *Факторно делимые смешанные группы изоморфны тогда и только тогда, когда у них существуют равные модули псевдорациональных отношений.*

Доказательство. Пусть G и H — произвольные факторно делимые смешанные группы, ΔG_X и ΔH_Y — такие их модули псевдорациональных отношений, что

$$\Delta G_X = \Delta H_Y. \tag{1}$$

Если $(r_1, \ldots, r_n)$ — произвольный элемент из ∇G_X, то

$$r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = g \in G. \tag{2}$$

Так как X — фундаментальная система группы G, то $G/\langle X\rangle$ — периодическая группа. Следовательно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$mg = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n, \tag{3}$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — некоторые целые числа. Из равенств (2) и (3) следует, что

$$(mr_1 - m_1)x_1 + \cdots + (mr_n - m_n)x_n = 0,$$

т. е. $((mr_1 - m_1), \ldots, (mr_n - m_n)) \in \Delta G_X$. Учитывая равенство (1), получаем:

$$(mr_1 - m_1)y_1 + \cdots + (mr_n - m_n)y_n = 0,$$

или

$$m(r_1y_1 + \cdots + r_ny_n) = m_1y_1 + \cdots + m_ny_y \in \langle Y\rangle \subset H. \tag{4}$$

Группа H сервантна в $\mathcal{R}(H)$, значит, из последнего равенства следует, что существует $h \in H$, для которого

$$mh = m_1y_1 + \cdots + m_ny_n. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем, что $m(r_1y_1 + \cdots + r_ny_n - h) = 0$, т. е.

$$r_1y_1 + \cdots + r_ny_n - h = t \in t(\mathcal{R}(H)).$$

Но $t(\mathcal{R}(H)) = t(H)$, следовательно, $r_1y_1 + \cdots + r_ny_n = h - t \in H$ и

$$(r_1, \ldots, r_n) \in \nabla H_Y. \tag{6}$$

Из (6) следует, что $\nabla G_X \subseteq \nabla H_Y$. Аналогично доказывается, что $\nabla H_Y \subseteq \nabla G_X$, т. е. $\nabla G_X = \nabla H_Y$. Тогда

$$G \cong \nabla G_X/\Delta G_X = \nabla H_Y/\Delta H_Y \cong H.$$

Прямое утверждение доказано.

Обратно, пусть φ — изоморфизм групп G и H, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — фундаментальная система группы G, тогда система $Y = \{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)\}$ является фундаментальной в группе H, причем

$$r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0 \Leftrightarrow r_1\varphi(x_1) + \cdots + r_1\varphi(x_n) = 0,$$

т. е. $\Delta G_X = \Delta H_Y$. ■

Теорема 7. *Если обобщенная характеристика факторно делимой группы G состоит из одинаковых характеристик χ, и их количество равно $r(G)$, то $G \cong \bigoplus\limits_{r(G)} Q_\chi$, где Q_χ — факторно делимая группа ранга 1, характеристики χ.*

Доказательство. Пусть G — произвольная группа, удовлетворяющая условиям теоремы, и $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — ее фундаментальная система. Рассмотрим два случая.

1-й случай. G — редуцированная группа.

В [4] показано, что X является порождающей системой псевдорационального типа группы G, т. е. $\mathcal{R}(G) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$. Так же, как в теореме 4 доказывается, что система X независима по модулю $T\mathcal{R}(G)$. Тогда $r(G) = r^*(\mathcal{R}(G)) = n$. Отсюда следует, что X является минимальной системой образующих модуля $\mathcal{R}(G)$, а значит, $\mathcal{R}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда

$$\mathcal{R}(G) \cong \bigoplus_n R_\chi. \tag{1}$$

Так как $r^*(\mathcal{R}(G)) = n$, то по предложению 2 $r^*(\Delta\mathcal{R}(G)_X) = r^*(\Delta G_X) = 0$ и

$$\Delta G_X = \bigoplus_{p \in P} \varepsilon_p \Delta G_X = \bigoplus_{p \in P} K_p, \tag{2}$$

где $K_p = \bigoplus\limits_n p^{m_p} \widehat{Z}_p$ или $K_p = 0$, при $\chi_p = m_p < \infty$ и $\chi_p = \infty$ соответственно.

Пусть $H = \bigoplus\limits_n Q_\chi$. Так как разложение (2) модуля ΔG_X определяется целиком обобщенной характеристикой группы, а у G и H они совпадают, то $\Delta G = \Delta H$. Таким образом, по предложению 3 группы G и H изоморфны

2-й случай. $G = divG \oplus G/divG$ и $divG \neq 0$.

Заметим, что псевдорациональные типы у групп G и $G/divG$ отличаются только прямым слагаемым $divG$, а значит, обобщенные характеристики у них совпадают. Пусть

$$z_1 = x_1 + divG,\ z_2 = x_2 + divG, \dots,\ z_n = x_n + divG.$$

Тогда $\mathcal{R}(G/divG) = \langle z_1, \dots, z_n \rangle_R$. Из условия теоремы следует, что

$$\langle z_1 \rangle_{\widehat{Z}_p} \cong \langle z_2 \rangle_{\widehat{Z}_p} \cong \dots \cong \langle z_n \rangle_{\widehat{Z}_p}$$

при любом простом p. Т. е. $o(\varepsilon_p z_1) = \dots = o(\varepsilon_p z_n)$ при любом простом p, а значит, $o(z_1) = \dots = o(z_n)$. Так как система $\{x_1, \dots, x_n\}$ независима, то из последнего равенства следует, что $r(G/divG) = r(G)$ или $r(G/divG) = 0$. Но $divG \neq 0$, значит, $r(G/divG) = 0$, т. е. $r(divG) = r(G)$ и $G/divG$ — периодическая группа.

Таким образом, $G/divG$ — факторно делимая группа локально свободной обобщенной характеристики. Тогда по следствиям 5 и 2 $G \cong \bigoplus\limits_n Q_\chi$, где $Q_\chi = Q \oplus K_\chi$ — факторно делимая группа ранга 1. ■

Заметим, что факторно делимая группа Q_χ ранга 1 определяется (с точностью до изоморфизма) своей характеристикой χ, и может быть найдена как сервантная оболочка 1 в кольце R_χ. В частности, $Q_\chi = R_\chi$, если χ не содержит символов ∞.

Следствие 8. *Если обобщенная характеристика факторно делимой смешанной группы, состоит из характеристик, принадлежащих одному типу, и их количество равно рангу группы, то эта группа разлагается в прямую сумму факторно делимых групп ранга* 1.

Доказательство. Пусть G — произвольная группа, удовлетворяющая условиям следствия и $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ — ее тип Ричмана:

$$\chi_1 = (m_{1p})_{p \in P},\ \chi_2 = (m_{2p})_{p \in P}, \dots,\ \chi_n = (m_{np})_{p \in P}.$$

Рассмотрим множество всех простых чисел $P_1 = \{p_1, \dots, p_k\}$, для которых не выполняются равенства

$$m_{1p} = m_{2p} = \dots = m_{np}.$$

Так как все m_{ip_j} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$ являются целыми неотрицательными числами, то $\varepsilon_p \mathcal{R}(G) = \widehat{G}_p = G_p$ — конечные группы при любом $p \in P_1$. Тогда $G = (1-\varepsilon)G \oplus \varepsilon G$, где $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_k}$. Очевидно, что $(1-\varepsilon)G$ — факторно делимая группа, удовлетворяющая условиям теоремы 7, а εG — R-модуль псевдорационального ранга 0. Тогда

$$G = (1-\varepsilon)G \oplus \varepsilon G \cong \bigoplus_n Q_\chi \oplus K_{\varphi_1} \oplus \dots \oplus K_{\varphi_n} = Q_{\chi_1} \oplus \dots \oplus Q_{\chi_n}. \blacksquare$$

Результат, аналогичный следствию 8, имеет место и для групп без кручения конечного ранга. В [15] показано, что если у группы без кручения конечного ранга тип Ричмана состоит из одинаковых типов, количество которых равно ее рангу, то эта группа вполне разложима, т. е. раскладывается в прямую сумму групп ранга 1.

Список литературы

[1] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы, Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.

[2] A. A. Fomin, Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers, Abelian Groups and Modules. Trends in Mathematics. Birkhaeuser Verlag Basel/Switzerland, 1999, P. 87–100.

[3] A. A. Fomin and W. Wickless, Quotient divisible abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. 126, 1998, 45–52.

[4] A. A. Fomin, Quotient divisible mixed groups, Contempt. Math. 273, 2001, 117–128.

[5] L. Fuchs and K.M. Rangaswamy, On generalized regular rings, Math. Z. 107, 1968, 71–81.

[6] S. Glaz and W. Wickless, Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups, Comm. in Algebra 22, 1994, 1553–1565.

[7] W. Wickless, A functor from mixed groups to torsion free groups, Contempt. Math. 171, 1995, 407–419.

[8] U.F. Albrecht, Mixed abelian groups with artinium quasi-endomorphism ring, Comm. Algebra 25, 1997, 3497–3511.

[9] A. A. Fomin and W. Wickless, Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible, Comm. in Algebra 26, 1998, 3563–3580.

[10] A. A. Fomin and W. Wickless, Categories of mixed and torsion free abelian groups, Abelian Groups and Modules. – Boston: Kluwer, 1995, 185–192.

[11] А.В. Яковлев, Камара Н'Фамара, Смешанные абелевы группы конечного ранга и их прямые разложения, Вестник СПбГУ, 1993, сер.1, т.2, №8, 57–61.

[12] П.А. Крылов, Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов, Фундаментальная и прикладная математика, 2000, т.6, №3, 793–812.

[13] П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова, Е.И. Подберезина, Об одном классе смешанных абелевых групп, Вестник Томского Университета, 2000, т.269.

[14] С.В. Чеглякова, Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел, Фундаментальная и прикладная математика, 2001, т.7, №2, 627–629.

[15] D.M. Arnold, Finite rank abelian torsion free groups and rings, Lecture Notes in Math., v. 931, 1982.

[16] А.В. Царев, Псевдорациональный ранг абелевой группы, Сиб. матем. ж., 2005, т.46, №1, 217–229.