УДК 512.541

О СЛАБО КВАЗИСЕРВАНТНО ИНЪЕКТИВНЫХ ГРУППАХ

А.Р.Чехлов

Аннотация

Абелева группа называется слабо квазисервантно инъективной, если всякий эндоморфизм любой ее сервантной подгруппы продолжается до эндоморфизма самой группы. В периодическом сепарабельном случае класс таких групп совпадает с классом периодически полных групп. Класс слабо квазисервантно инъективных групп без кручения шире класса квазисервантно инъективных групп без кручения. Получено описание слабо квазисервантно инъективных групп без кручения с циклическими p-базисными подгруппами. Изучены вполне транзитивные слабо квазисервантно инъективные группы без кручения. Однородные разложимые слабо квазисервантно инъективные группы без кручения квазисервантно инъективны.

Библиография: 12 названий.

Абелева группа A называется *квазисервантно инъективной*, сокращенно QPI-*группой* (*слабо квазисервантно инъективной*, сокращенно $SQPI$-*группой*), если всякий гомоморфизм $G \to A$ (всякий эндоморфизм) любой ее сервантной подгруппы G продолжается до эндоморфизма группы A. Изучению свойств QPI-групп посвящена проблема 17 а) из [1]. QPI-группы исследовались в работах ряда авторов (см., например, [2]-[9]). В [2] изучены QPI-группы без кручения конечного ранга. Описание редуцированных QPI-групп в классе групп без кручения, у которых тип любого ненулевого элемента сравним с некоторым максимальным типом в множестве типов всех ненулевых элементов группы, получено в [3]. Примеры QPI-групп без кручения, без максимальных элементов в множестве типов всех ненулевых элементов группы, построены в [4]. В [5] описаны QPI-группы без кручения с циклическими p-базисными подгруппами. В [6], [7] и [9] описание QPI-групп расширено на все группы без кручения.

Нетрудно показать, что изучение $SQPI$-групп сводится к редуцированному случаю. Наибольшее внимание в работе уделено $SQPI$-группам без кручения и их свойствам. Получено описание $SQPI$-групп без кручения с циклическими p-базисными подгруппами. Существуют $SQPI$-группы без кручения, не являющиеся QPI-группами. Однако среди однородных разложимых групп без кручения оба эти классы групп совпадают (теорема 12).

Если A – группа без кручения и $a \in A$, то $h_p^A(a)$ – p-высота, $\chi_A(a)$ – характеристика, $t_A(a)$ – тип элемента a в группе A; если $G \subseteq A$, то $\langle G\rangle_*^A$ – сервантная подгруппа в A, порожденная G (индекс A иногда опускаем); $\Pi(A)$ – множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $\Pi(a) = \Pi(\langle a\rangle_*)$; $A(t) = \{a \in A \,|\, t(a) \geq t\}$; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A; если p – простое число, то $r_p(A)$ – *p-ранг* группы A, т.е. ранг ее факторгруппы A/pA, $p^\omega A = \bigcap_{n=1}^\infty p^n A$; $T(A) = \{t(a) \,|\, 0 \neq a \in A\}$; несравнимость обозначается знаком $\not\gtrless$. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(G) = \Pi(A)$ для любой ее сервантной подгруппы $G \neq 0$; *вполне транзитивной*, если для любых $0 \neq a, b \in A$ условие $\chi_A(a) \leq \chi_A(b)$ влечет существование $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$; *связанной*, если все ее факторгруппы по ненулевым сервантным подгруппам делимы; *квазиразложимой*, если существуют ее подгруппы $A_i \neq 0\,(i \in I, |I| \geq 2)$ такие, что $nA \subseteq \bigoplus_{i\in I} A_i$ для некоторого натурального числа n, в противном случае A называется *сильно неразложимой*, если все A_i квазиоднородны, то A называется *квазиоднородно квазиразложимой*. Отметим, что все QPI-группы без кручения вполне транзитивны.

Лемма 1. *Пусть A – редуцированная группа без кручения. Тогда*

1) [3] *если все сервантные подгруппы в A сильно неразложимы, то $t_{A/\langle a\rangle_*}(g + \langle a\rangle_*) > t_A(g)$ для любых ее элементов $a, g \neq 0$. В частности, если f – гомоморфизм A в группу без кручения B с ненулевым ядром, то $t_A(g) < t_B(fg)$ для любого $0 \neq g \in A$;*

2) [3] *если $f \in E(A)$, $0 \neq b \in Ker\, f$, $0 \neq a \in A$, $h_p(b) \geq h_p(fa)$, то $h_p(a+b) = h_p(a)$. В частности, если $\chi(b) \geq \chi(fa)$, то $\chi(a + b) = \chi(a)$;*

3) [9] *если A вполне транзитивна, $f \in E(A)$ и $A(t) \subseteq Ker\, f$ для некоторого $t \in T(A)$, причем $\Pi(A(t)) = \Pi(A)$, то $f = 0$.*

Лемма 2. *Пусть $A = B\oplus G$ – редуцированная $SQPI$-группа без кручения. Тогда*

1) *если $\varphi : H \to G$ – гомоморфизм сервантной подгруппы H в B, то он продолжается до $f \in Hom(B, G)$. В частности, если $\chi(b) \leq \chi(g)$, $b \in B, g \in G$, то $fb = g$ для некоторого $f \in Hom(B, G)$;*

2) *если $\varphi : B \to G$ – мономорфизм с сервантным образом, то φB – прямое слагаемое в G;*

3) *если B имеет квазиразложимую сервантную подгруппу $n\langle b, x\rangle_* \subseteq \langle b\rangle_* \oplus \langle x\rangle_*$ такую, что $\chi(x) \geq \chi(b)$, то для любого $0 \neq g \in G$ с условием $\Pi(g) \cap \Pi(x) \neq \emptyset$ существует $\varphi \in Hom(G, B)$ со свойством $\varphi g \neq 0$. В частности, если x содержится в однородном квазислагаемом группы B, то $t(x) \geq t(g)$.*

Доказательство. 1) вытекает из того, что φ продолжается до такого эндоморфизма α сервантной подгруппы $H \oplus G$, что $\alpha|H = \varphi$ и $\alpha|G = 0$.

2) Подгруппа $B\oplus\varphi B$ сервантна в A. Ее эндоморфизм $\varphi^{-1}\pi$, где π – проекция A на G, продолжается до $\alpha \in E(A)$, для которого $(1-\pi)\alpha G = B$. Тогда для $\theta = \varphi(1-\pi)\alpha$ имеем $\theta|\varphi B = 1_{\varphi B}$ и $\theta G = \varphi B$. Следовательно, φB – прямое слагаемое в G.

3) Пусть $p \in \Pi(g)\cap\Pi(x)$. Подгруппа $U = \langle p^k b+g, x\rangle_*^A$, где $k > h_p(n^2x)$, квазиразложима, $nU \subseteq \langle p^k b+g\rangle_* \oplus \langle x\rangle_*$. Возьмем такой $f \in E(U)$, что $fx = 0$ и $f(p^k b+g) = n^2x$. Тогда $\varphi = \pi\alpha$, где $\alpha \in E(A)$ – продолжение f, а π – проекция A на B.

Лемма 3. *Если $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ – редуцированная группа, где $\Pi(A_i)\cap\Pi(A_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$, то A является $SQPI$-группой тогда и только тогда, когда каждая A_i суть $SQPI$-группа.*

Доказательство. Следует из того, что если H – сервантная подгруппа в A, $f \in E(A)$, π_i – проекция A на A_i, то πH_i – сервантная подгруппа в A_i и $\pi_i f = f\pi_i$ для всех $i \in I$.

Предложение 4. *Пусть A – $SQPI$-группа. Тогда*

1) *ее прямые слагаемые, сервантные вполне характеристические подгруппы, в частности, периодическая часть суть $SQPI$-группы;*

2) *если A периодична, то факторгруппа A/A^1 периодически полна, где $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$. В частности, если A сепарабельна, то она периодически полна.*

Доказательство. 1) проверяется непосредственно. 2) Согласно лемме 3 можно ограничиться примарным случаем. Если B – p-базисная подгруппа в A, B_0 – ее образ при естественном эпиморфизме $\varphi : A \to A_0 = A/A^1$, то φ индуцирует изоморфизм

$\varphi_0 : B \to B_0$ [1; § 34, E)]. Поэтому если $\alpha \in E(B_0)$, то $\alpha_0 = \varphi_0^{-1}\alpha\varphi$ продолжается до $\beta \in E(A)$. Тогда β индуцирует $\beta_0 \in E(A_0)$, для которого $\beta_0|B_0 = \alpha$. Следовательно, эндоморфизмы группы B_0 продолжаются до эндоморфизмов группы A_0. Согласно [1, теорема 69.3] A_0 периодически полна.

Группа без кручения называется *эндотранзитивной*, если всякий гомоморфизм между любыми двумя ее изоморфными сервантными подгруппами ранга 1 продолжается до эндоморфизма самой группы. Вполне транзитивные группы без кручения эндотранзитивны. Эндотранзитивные группы изучались в работах [10], [11]. Группу без кручения назовем *слабо эндотранзитивной*, если все эндоморфизмы любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжаются до эндоморфизмов самой группы. Непосредственно проверяется

Лемма 5. *Следующие свойства группы без кручения A эквивалентны:*

1) *A слабо эндотранзитивна;*

2) *всякий автоморфизм любой сервантной подгруппы в A ранга 1 продолжается до эндоморфизма группы A;*

3) *для любой сервантной подгруппы G ранга 1 в A и любых $0 \neq a, b \in G$ таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ (равносильно $\chi(a) = \chi(b)$) существует $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$.*

Предложение 6. *Пусть A – группа без кручения. Тогда*

1) *если для каждого простого p и любого $0 \neq a \in p^\omega A$ деление $\langle a\rangle_*$ на p продолжается до эндоморфизма группы A, то A слабо эндотранзитивна;*

2) *если A – слабо эндотранзитивная группа с сильно неразложимыми сервантными подгруппами и с условием максимальности в $T(A)$, или же все ненулевые эндоморфизмы в A – мономорфизмы, то A квазиоднородна.*

3) *если $nA \subseteq X \subseteq A$, где $X = \bigoplus_{i\in I} A_i$ $(X = \prod_{i\in I} A_i)$, а A_i – квазиоднородные группы, то A слабо эндотранзитивна;*

4) *если A – группа конечного ранга, то A слабо эндотранзитивна $\iff$ A – квазиоднородно квазиразложимая группа $\iff$ для каждого простого p деление $p^\omega A$ на p продолжается до эндоморфизма группы A;*

5) *если A – группа ранга 2, то A – $SQPI-$группа $\iff$ A слабо эндотранзитивна $\iff$ A квазиоднородна или квазиразложима.*

Доказательство. 1) Пусть G – сервантная подгруппа ранга 1 и $f \in E(G)$. Тогда f совпадает с умножением G на некоторое рациональное число $r = m/n$, где $mG = G$. Если p – простой делитель m, то $G \subseteq p^\omega A$. Поэтому f продолжается до эндоморфизма группы A.

2) Если $0 \neq a \in p^\omega A$, то $pfa = a$ для некоторого $f \in E(A)$. Утверждение вытекает из того, что $\varphi a = 0$ для $\varphi = 1_A - pf$ и из леммы 1 поскольку $t(\varphi^n b) < t(\varphi^{n+1} b)$ для каждого $b \in A \setminus pA$.

3) Пусть $B = \langle A_j | j \in I,\, pA_j = A_j\rangle_*$, $G = \langle A_s | s \in I,\, pA_s \neq A_s\rangle_*$. Тогда $p^\omega A = B$. Достаточно показать, что деление $p^\omega A$ на p продолжается до некоторого $\varphi \in E(A)$. Факторгруппа $A/(B \oplus G)$ есть прямая сумма циклических групп $\bigoplus_{k\in K}\langle \overline{x}_k\rangle$, где $\overline{x}_k = x_k + B \oplus G$, $nx_k = b_k + g_k$, $b_k \in B$, $g_k \in G$. Будем считать, что n – наименьшее натуральное со свойством $nA \subseteq B \oplus G$. Тогда p и n взаимно просты. Поэтому $pt + nr = 1$ для некоторых целых чисел t, r. Откуда $x_k - rg_k = pu_k$, $u_k \in A$. Пусть теперь $f|G = t \cdot 1_G$, $pf|B = 1_B$ и $fx_k = u_k$. Тогда f индуцирует искомый φ.

4) В силу конечности ранга найдется $f \in E(A)$ со свойством $Ker f = p^\omega A$. Далее, $nA \subseteq A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \subseteq A$, где A_i – сильно неразложимые сервантные подгруппы в A. Существуют такие $\varphi_j \in E(A_j)$, что $(nf)|A_j = \varphi_j$. Поэтому если $0 \neq p^\omega A_j \neq A_j$,

то $A_j/p^\omega A_j \cong (H_j \oplus p^\omega A_j)/p^\omega A_j$, где $H_j = \varphi_j A_j$. Конечность ранга влечет существование натурального k со свойством $kA_j \subseteq H_j \oplus p^\omega A_j$, что противоречит сильной неразложимости A_j. 5) следует из 4).

Предложение 6 показывает, что класс слабо эндотранзитивных групп весьма широк. Например, все сепарабельные группы без кручения слабо эндотранзитивны. Напомним, что сепарабельная группа без кручения эндотранзитивна тогда и только тогда, когда условие $\Pi(B) \cap \Pi(G) = \emptyset$ выполняется для любых ее неизоморфных прямых слагаемых ранга 1 B и G [10, следствие 3.6], а эндотранзитивная группа без кручения конечного ранга разложима или сильно неразложима [10, теорема 4.1]. Предложение 8 показывает, что существуют неэндотранзитивные $SQPI$-группы среди вполне разложимых групп. Для удобства ссылок приведем следующий результат из [12].

Теорема 7. *Пусть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где A_i – группы без кручения ранга 1 типов t_i. В группе A каждая сервантная подгруппа вполне разложима (почти вполне разложима) тогда и только тогда, когда среди типов $t_1 \cap t_2$, $t_1 \cap t_3$, $t_2 \cap t_3$ имеются хотя бы два равных (хотя бы две пары сравнимых).*

Предложение 8. I) *Редуцированная вполне разложимая группа A ранга 3 является $SQPI$-группой тогда и только тогда, когда она однородна или представима в виде $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где $r(A_i) = 1$, $t(A_i) = t_i$ и выполняется одно из утверждений:*

1) $\Pi(A_1) \cap \Pi(A_2 \oplus A_3) = \emptyset$;

2) $t_1 \cap t_2$, $t_1 \cap t_3$, $t_2 \cap t_3$ – попарно несравнимые типы;

3) $t_1 < t_2$, причем справедливо одно из условий:

а) $t_2 = t_3$; б) $t_3 > t_1$ и $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$; в) $t_1 \not\leq t_3$ и или $t_3 < t_2$, или $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$.

II) *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – такая вполне разложимая группа, что $r(A_i) = 1$, $t(A_i) = t_i$ и тип $t_{i_1} \cap \ldots \cap t_{i_n}$ несравним с $t_{j_1} \cap \ldots \cap t_{j_m}$ для любых конечных подмножеств $I_n = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $J_m = \{j_1, \ldots, j_m\} \subseteq I$ с условием $I_n \backslash J_m$, $J_m \backslash I_n \neq \emptyset$, то A является $SQPI$-группой.*

Доказательство. I) Необходимость. Пусть A неоднородна и 1) не выполняется при любых перестановках A_i. Предположим сначала, что типы t_1, t_2, t_3 попарно несравнимы. Если, например, $t_1 \cap t_2 \leq t_2 \cap t_3$, то $t_1 \cap t_2 \leq t_3$. Тогда по лемме 2, 1) существует $0 \neq f \in Hom(A_1 \oplus A_2, A_3)$, что противоречит несравнимости t_1, t_2, t_3. Это доказывает 2).

Предположим теперь, что, например, $t_2 = t_3$. Поскольку $\Pi(A_1) \cap \Pi(A_2) \neq \emptyset$, то по лемме 2, 3) $t_2 > t_1$ (т.к. $t_1 \neq t_2$). Пусть, наконец, типы t_1, t_2, t_3 попарно различны и $t_1 < t_2$. Если $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) \neq \emptyset$, то по лемме 2, 3) $t_2 > t_3$ и $t_1 \not\leq t_3$. Если же $\Pi(A_1) \cap \Pi(A_2) = \emptyset$, то по той же лемме $t_3 > t_1$ или $t_1 \not\leq t_3$.

Достаточность. Если A однородна, то она является QPI-группой, если же выполнено условие 1), то в силу леммы 3 она – $SQPI$-группа.

Пусть G – сервантная подгруппа в A ранга 2, $\varphi \in E(G)$. Можно ограничиться случаем, когда $G = \langle a + b, b + c \rangle_*$, где $0 \neq a \in A_1$, $0 \neq b \in A_2$, $0 \neq c \in A_3$.

2) Нетрудно видеть, что типы t_1, t_2, t_3 попарно несравнимы. Согласно теореме 7 G сильно неразложима, далее, $\varphi(a + b) = r(a + b)$ и $\varphi(b + c) = s(b + c)$ для некоторых рациональных чисел r и s. Покажем, что $r = s$. Имеем $\varphi(a - c) = \varphi(a + b - b - c) = r(a + b) - s(b + c) = ra + (r - s)b - sc$. Откуда $t(a - c) \leq t(a) \cap t((r - s)b) \cap t(c)$. Следовательно, если $r \neq s$, то $t_1 \cap t_3 \leq t_1 \cap t_2 \cap t_3$. Это возможно только если $t_2 \geq t_1 \cap t_3$, но тогда $t_1 \cap t_2 \geq t_1 \cap (t_1 \cap t_3) = t_1 \cap t_3$. Противоречие.

3) Если $t_2 = t_3$, то для $H = \langle b + c\rangle_*$ в силу однородности $A_2 \oplus A_3 = H \oplus K$ [1, лемма 86.8]. Отсюда $G = H \oplus B$, где $B = G \cap (A_1 \oplus K)$ – группа ранга 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in E(A)$ – такие, что $\varphi_1|H = \varphi|H$, $\varphi_1(A_1 \oplus K) = 0$, $\varphi_2|B = \varphi|B$, $\varphi_2 H = 0$. Тогда $\varphi_1 + \varphi_2$ продолжает φ.

б) Так как $t_1 = t_1 \cap t_2 = t_1 \cap t_3$, то G вполне разложима, $G = X \oplus Y$. Поскольку $t(b+c) = t_2 \cap t_3$ максимален в $T(G)$, то, например, $\langle b+c\rangle_* = Y$. Имеем $\varphi(b+c) = r(b+c)$ и $X = \langle x\rangle_*$, где $x = a + sb + tc$, а r, s и t – некоторые рациональные числа. Заметим, что $\chi(a) \le \chi(sb + tc)$. Действительно, если $h_p(a) > h_p(sb)$, то $h_p(c) = \infty$, и если n – знаменатель s, то $nx - ns(b + c) = na + n(t - s)c \in G$. Откуда $na + n(t - s)c = p^m g$, где $g \in G$, $m = h_p(na)$. Если $g = k(a + sb + tc) + l(b + c)$ для некоторых рациональных k и l, то $na = p^m ka$. Это противоречит определению m. Пусть $\varphi_{11} a = \pi_1 \varphi x$, $\varphi_{12} a = \pi_2 \varphi x - rsb$, $\varphi_{13} a = \pi_3 \varphi x - trc$, $\varphi_{22} b = rb$, $\varphi_{33} c = rc$, где $\pi_i : A \to A_i$ – проекции. Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + \varphi_{33}\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha x = x$, $\alpha(b + c) = \varphi(b + c)$, т.е. $\alpha|G = \varphi$.

в) Поскольку $t_1 \cap t_2 = t_1 > t_1 \cap t_3$, то G почти вполне разложима, $nG \subseteq X \oplus Y$, где X, Y – сервантные подгруппы в G ранга 1, и n – наименьшее натуральное с таким свойством. Так как $t(a+b) = t_1$ и $t(b+c) = t_2 \cap t_3$ максимальны в $T(G)$, то $X = \langle a+b\rangle_*$, $Y = \langle b+c\rangle_*$ и $\varphi X \subseteq X$, $\varphi Y \subseteq Y$. Поэтому $\varphi(a+b) = r(a+b)$ и $\varphi(b+c) = s(b+c)$ для некоторых рациональных r и s. Пусть $\varphi_{11} a = ra$, $\varphi_{33} c = sc$, k – наименьшее общее кратное знаменателей чисел r и s.

Если $t_2 > t_3$, то найдутся наименьшие натуральные m и t со свойствами $\chi(mb) \ge \chi(a)$ и $\chi(tb) \ge \chi(c)$. Пусть $\psi = k\varphi - ks \cdot 1_G$. Тогда $\psi \in Hom(G, A)$ и $Y \subseteq Ker\psi$. Если $\psi G = 0$, то $(s \cdot 1_A)|G = \varphi$. Если же $\psi G \ne 0$, то наибольший общий делитель d чисел m и t делит $k(r - s)$. Это вытекает из того, что d делит $a - c \in G$, $a - c = dg$, $g \in G$, и из того, что $d\psi g = \psi(a-c) = \psi(a+b-b-c) = k(r-s)(a+b)$. Следовательно, система двух сравнений $x \equiv kr\,(mod\,m)$, $x \equiv ks\,(mod\,t)$ имеет решение $x = l$. Поскольку A_2 делится на k, то можно определить $\varphi_{12} a = k^{-1}(kr - l)b$, $\varphi_{22} b = k^{-1} lb$, $\varphi_{32} c = k^{-1}(ks - l)b$. Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + (\varphi_{31} + \varphi_{32})\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha(a+b) = r(a+b)$, $\alpha(b+c) = s(b+c)$, т.е. $\alpha|G = \varphi$.

Пусть теперь $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$. Предположим, что $m = h_p(a) > h_p(b)$. Можно считать, что $h_p(b) = 0$. Покажем тогда, что p^m делит $r - s$. Так как $h_p(c) = \infty$, то $a - c = p^m g$, где $g \in G$. Если k – знаменатель числа s, то k и p взаимно просты. Это вытекает из k-делимости Y. Пусть $\psi = k\varphi - ks \cdot 1_G$. Тогда $p^m \psi g = \psi(a + b - a - c) = kra + (kr - sk)b$. Следовательно, p^m делит $k(r - s)$ и, значит, $r - s$. Поэтому $\chi((r - s)b) \ge \chi(a)$. Пусть $\varphi_{11} a = ra$, $\varphi_{12} a = (r - s)b$, $\varphi_{22} b = sb$, $\varphi_{33} c = sc$. Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + \varphi_{33}\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha|G = \varphi$.

II) Пусть $g = a_1 + \ldots + a_n \in G$, где G – сервантная подгруппа в A, $f \in E(G), 0 \ne a_j \in A_{i_j}$, причем g выбран так, чтобы его носитель $\{i_1, \ldots, i_n\}$ был наименьшим среди носителей элементов в G, содержащих i_1. Тогда если $0 \ne fg = b_1 + \ldots + b_m$, где $0 \ne b_k \in A_{j_k}$, то $\{j_1, \ldots, j_m\} = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Справедливость этого равенства следует из выбора g и условия на типы t_i. Поэтому $fg = r_1 a_1 + \ldots + r_n a_n$ для некоторых рациональных r_j . Заметим, что $r = r_1 = \ldots = r_n$. Действительно, если u – числитель, а v – знаменатель числа r_n и, например, $r_1 \ne r_n$, то $0 \ne ug - vfg = (u - vr_1)a_1 + \ldots + (u - vr_{n-1})a_{n-1} \in G$, что противоречит выбору g. Предположим, что $x = g_1 + \ldots + g_m \in G$, $g_k \in A_{i_k}$, $fx = s_1 g_1 + \ldots + s_m g_m$ и, например, $i_n = j_m$, причем $r \ne s_m$. Для целых чисел t, l со свойством $ta_n = lg_m$ имеем $f(tg - lx) = f(ta_1 + \ldots + ta_{n-1} - lg_1 - \ldots - lg_{m-1}) = tfg - lfx = tra_1 + \ldots + tra_{n-1} + l(r - s_m)g_m - ls_1 g_1 - \ldots - ls_{m-1} g_{m-1}$, что противоречит условию на типы. Поскольку $\chi(a_j) \le \chi(ra_j)$, то f продолжается до эндоморфизма группы A.

Легко строится квазиоднородная группа бесконечного ранга, удовлетворяющая условиям II) предложения 8. Следующая лемма уточняет лемму 2 из [5], доказанную для QPI-групп.

Лемма 9. *Пусть A – редуцированная $SQPI$-группа без кручения, H – такая ее сервантная подгруппа, что $\Pi(H) \cap \Pi(A/H) = \emptyset$. Тогда $A = H_1 \oplus A_1$, где H_1 – замыкание подгруппы H в Z-адической топологии группы A и $\Pi(H_1) \cap \Pi(A_1) = \emptyset$.*

Доказательство. Если $\overline{A}$ – Z-адическое пополнение группы A, то $\overline{A} = \overline{H} \oplus V$, где группа V изоморфна пополнению редуцированной части A/H. Поэтому $\Pi(\overline{H}) = \Pi(H)$, $\Pi(V) = \Pi(A/H)$ и, значит, $\Pi(\overline{H}) \cap \Pi(V) = \emptyset$, в частности, подгруппы $\overline{H}$ и V вполне характеристичны в $\overline{A}$. Поскольку $\overline{A}$ – сервантно инъективна, то все эндоморфизмы группы A продолжаются до эндоморфизмов группы $\overline{A}$. Обозначим $B = A \cap V$. Так как $\Pi(H) \cap \Pi(B) = \emptyset$, то подгруппа $H \oplus B$ сервантна в A.

Пусть $\alpha \in E(A)$ и $\alpha(H \oplus B) = 0$. Тогда $\alpha(\overline{H} \oplus \overline{B}) = 0$. Имеем $V = \overline{B} \oplus V_1$, где V_1 – некоторая подгруппа в V. Если $a \in A$, $a = x + y + z$, где $x \in \overline{H}, y \in \overline{B}, z \in V_1$, то $\alpha a = \alpha z = b \in B$. Пусть $\pi \in E(A)$ – продолжение проекции $H \oplus B$ на H. Тогда $\pi\alpha\pi = 0$. Имеем $\pi(\pi - \pi^4)\pi = 0$. Откуда $\pi^3 = \pi^6$. Следовательно, $A = H_1 \oplus A_1$, где $H \subseteq H_1 = Im\pi^3$, $B \subseteq A_1 = Ker\pi^3$. Если не все эндоморфизмы группы H_1 определяются своим действием на H, то по доказанному $H_1 = H_2 \oplus H_3$, где $H \subseteq H_2$ и $H_3 \neq 0$. Тогда $\overline{A} = \overline{H} \oplus W$, где $W = \overline{H}'_2 \oplus \overline{H}_3 \oplus \overline{A}_1$, $\overline{H}_2 = \overline{H} \oplus \overline{H}'_2$. Поскольку V вполне характеристична в $\overline{A}$, то V определяется однозначно. Следовательно, $V = W$ и $H_3 \oplus B \subseteq A \cap V = B$, что противоречит условию $H_3 \neq 0$. Имеем $\Pi(H) \subseteq \Pi(H_1)$. Если $pH = H$, то $\psi_p H_1 = 0$, где $\psi_p = 1_{H_1} - p\varphi_p \in E(H_1)$, а φ_p – продолжение деления $p^\omega H_1$ на p. Следовательно, $pH_1 = H_1$ и, значит, $\Pi(H) = \Pi(H_1)$. Если теперь $p \in \Pi(H_1/H)$ для некоторого p, то $p \in \Pi(A/H)$. Следовательно, H p-делима. По доказанному p-делима H_1. Полученное противоречие показывает, что группа H_1/H делима.

Теорема 10. *Редуцированная группа без кручения A с циклическими p-базисными подгруппами является $SQPI$-группой тогда и только тогда, когда существует семейство связанных $SQPI$-групп A_i $(i \in I)$ такое, что $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ и существуют сервантные вложения $\bigoplus_{i \in I} A_i \subseteq A \subseteq \prod_{i \in I} A_i = S$, где A вполне характеристична в S.*

Доказательство. Вытекает из леммы 9 и доказывается аналогично доказательству основной теоремы из [5].

Лемма 11. *Пусть A – $SQPI$-группа без кручения, $0 \neq a \in A$. Тогда если A однородная или квазиоднородная вполне транзитивная группа, а тип $t(a)$ максимален в $T(A)$, то a содержится в прямом слагаемом в A с сильно неразложимыми сервантными подгруппами.*

Доказательство. Рассмотрим множество M всех пар (G, η), где G – сервантная подгруппа в A, $\eta \in Hom(G, A)$, $\eta a = a$, $\eta G \subseteq G$ и каждый ненулевой гомоморфизм $\langle \eta G \rangle_* \to A$ есть мономорфизм. Так как M индуктивно и $M \neq \emptyset$, поскольку $(\langle a \rangle_*, 1) \in M$, то M обладает максимальным элементом (H, φ). Пусть $\psi \in E(A)$, $\psi | H = \varphi$. Покажем, что все ненулевые гомоморфизмы $D = \langle \psi A \rangle_* \to A$ есть мономорфизмы.

Допустим, что $H \neq A$. Тогда существует $b \in A \setminus H$ со свойством $c = \psi b \notin \langle \varphi H \rangle_*$. Группа $B = \langle a, c \rangle_*$ сильно неразложима. Действительно, в противном случае найдется натуральное число n такое, что $nB \subseteq X \oplus Y$, где X, Y – сервантные подгруппы в B ранга 1. Тогда однородность A влечет разложимость B и, значит, $B = \langle a \rangle_* \oplus Z$

для некоторой подгруппы Z в B. Если A не однородна, то в силу максимальности $t(a)$, например, $t(a) = t(X)$. Допустим, что $t(Y) \not\geq t(a)$. Тогда по условию A вполне транзитивна. Предположим, что $x \in X$, $y \in Y$ и $h_p(x) = h_p(y) = 0$ для некоторого простого числа p. Имеем $\chi(x + p^k y) \leq \chi(ny)$, где k – такое натуральное, что $ny \notin p^k A$. Следовательно, $f(x + p^k y) = ny$ для некоторого $f \in E(A)$. Откуда $fx \neq 0$ и в силу максимальности $t(x) = t(fx) = t(ny - p^k fy) \geq t(y)$. Противоречие. Поэтому $\Pi(X) \cap \Pi(Y) = \emptyset$ и, значит, B опять разложима. Максимальность $t(a)$ влечет $B = \langle a \rangle_* \oplus Z$. Существует $\alpha \in E(A)$, $\alpha a = a$, $\alpha Z = 0$. Откуда $\alpha\psi(\langle b, H \rangle_*) = \varphi H$ и, значит, $(\langle b, H \rangle_*, \alpha\psi) \in M$, что противоречит максимальности (H, φ). Итак, B сильно неразложима. Поскольку все ненулевые элементы из $Hom(\langle \varphi H \rangle_*, A)$ – мономорфизмы, то отсюда следует, что $\langle a, c \rangle_*$ сильно неразложима для любого $c \in D$.

Предположим, что $0 \neq \alpha \in Hom(D, A)$ и $0 \neq c \in Ker\alpha$. Поскольку $\langle a, c \rangle_*$ сильно неразложима, то $t(\alpha a) > t(a)$ и, следовательно, в силу максимальности $\alpha a = 0$. Гомоморфизм α индуцирует эндоморфизм $\alpha\psi \in E(A)$, который по лемме 1 равен нулю. Следовательно, $\alpha = 0$. Так как $\psi a = a$, то ψ действует на D как тождественный гомоморфизм. Поэтому $A = D \oplus Ker\psi$.

Из доказанной леммы следует, что всякая однородная $SQPI$-группа без кручения, имеющая квазиразложимые сервантные подгруппы, разложима. Рассмотрим подробнее такие группы. Справедлива

Теорема 12. *Однородная разложимая $SQPI$-группа является QPI-группой.*

Доказательство. Согласно лемме 11 $A = A_1 \oplus B_1$, где в A_1 сервантные подгруппы сильно неразложимы, $B_1 \neq 0$. Допустим, что найдутся сервантная подгруппа H в A_1, $a \in A_1$ и $p \in \Pi(A)$ такие, что $h_p(a + H) = 0$. Если $b \in B_1 \setminus pB_1$, $\chi(a) \leq \chi(b)$ и $G = \langle a + pb, H \rangle_*$, то $\chi(a + pb + H) = \chi(a + pb)$. Поэтому существует $f \in E(G)$ такой, что $Kerf = H$ и $f(a + pb) = a + pb$. Пусть $\varphi \in E(A)$, $\varphi|G = f$, π – проекция A на A_1. Имеем $\pi\varphi(a + pb) = a$, $\pi\varphi\pi \in E(A_1)$, $H \subseteq Ker\pi\varphi\pi$. Поэтому, так как все ненулевые эндоморфизмы A_1 – мономорфизмы, $\pi\varphi\pi = 0$. Откуда $\pi\varphi(a + pb) = p\pi\varphi b = a$, что противоречит выбору a. Следовательно, A_1 – связанная группа. В B_1 также найдется связанная подгруппа A_2. Так как $t(A_1) = t(A_2)$, то из леммы 2 следует, что $A_1 \cong A_2$. Если $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, где A_i – изоморфные связанные группы, то A есть QPI-группа [3, теорема 3.1]. Допустим, что A имеет сервантную подгруппу $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i – изоморфные связанные группы. Заметим, что всякое счетное множество элементов группы A можно вложить в некоторую такую подгруппу. Пусть $a_i \in A_i \setminus pA_i$, $\chi(a_i) = \chi(a_j)\,(i, j = 1, 2, \ldots)$. Положим $b_i = a_i - pa_{i+1}$. Имеем $a_1 = b_1 + pa_2 = \ldots = b_1 + pb_2 + \ldots + p^{n-1}b_n + p^n a_{n+1}$. Пусть H – замыкание в p-адической топологии группы A ее сервантной подгруппы $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \langle b_i \rangle_*$, и $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ – последовательность Коши в этой топологии. Заметим, что $G \subseteq H$. Так как B плотна в H, то можно считать, что $g_i \in B$. Если $g_{i+1} - g_i = p^i x_i$, то пусть $\varphi \in E(B)$ со свойством $\varphi b_1 = g_1$, $\varphi b_i = x_{i-1}\,(i = 2, 3, \ldots)$. По условию φ продолжается до $\psi \in E(A)$. Тогда $\psi a_1 = \psi b_1 + p\psi b_2 + \ldots + p^{n-1}\psi b_n + p^n \psi a_{n+1} = g_1 + px_1 + \ldots + p^{n-1}x_{n-1} + p^n \psi a_{n+1} = g_n + p^n \psi a_{n+1}$, т.е. H и, значит, A в силу вышесказанного замечания полны в p-адической топологии. Поэтому A алгебраически компактна, в частности, является QPI-группой.

Перейдем к вполне транзитивным $SQPI$-группам без кручения. Сначала ограничимся квазиоднородным случаем.

Предложение 13. *Если A – квазиднородная вполне транзитивная $SQPI$-группа без кручения бесконечного p-ранга, имеющая ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми* *ядрами, то A – однородная алгебраически компактная группа.*

Доказательство. Если $0 \neq a \in A$ – элемент с максимальным типом, то по лемме 11 $A = A_1 \oplus B$, где $a \in A_1$, все сервантные подгруппы в A_1 сильно неразложимы и, следовательно, по лемме 1 все ненулевые эндоморфизмы в A_1 суть мономорфизмы. Пусть $h_p(a) = 0$ и $b \in B \setminus pB$. Имеем $\chi(a + pb) \leq \chi(b)$. Поэтому $fa + pfb = b$ для некоторого $f \in E(A)$. Если π – проекция A на B, то $0 \neq x = \pi fa \in B$ в силу выбора b. Ввиду максимальности $t(a) = t(x)$. Поэтому $x \in A_2$ для некоторого прямого слагаемого A_2 в B. Поскольку $t(a) = t(\varphi a)$ для любого $0 \neq \varphi \in E(A_1)$, то найдется натуральное n со свойством $\chi(na) = \chi(\varphi a)$. Откуда $\psi\varphi a = na$, где $\psi \in E(A_1)$ и, значит, $\psi\varphi = n \cdot 1_{A_1}$. В частности, φ сохраняет типы всех элементов группы A_1. Из этого вытекает, что типы всех ненулевых элементов в A_1 максимальны. Пусть $a \in A_1 \setminus pA_1$, $b \in A_2 \setminus pA_2$. Поскольку $\chi(pa + b) \leq \chi(a)$, то $pfa + fb = a$, $f \in E(A)$. Откуда $fb \neq 0$ и $t(b) = t(fb) = t(a - pfa) = t(a)$. Следовательно, $A_1 \oplus A_2$ однородна. Так как $r_p(A)$ бесконечен, то так же, как в теореме 12, A – однородная алгебраически компактная группа.

Пусть теперь в $T(A)$ нет максимальных элементов. Заметим, что если $f^2 = 0$ для некоторого $0 \neq f \in E(A)$, то найдется такой $\varphi \in E(A)$, что $\varphi^2 \neq 0$ и $Kerf \subseteq Ker\varphi$. В самом деле, согласно лемме 1, 1) $\chi(p^n g + fg) = \chi(g)$, где $fg \neq 0$ и $n > h_p(fg)$. Тогда если $p^n\psi g + \psi fg = g$, где $\psi \in E(A)$, то $\varphi^2 \neq 0$ для $\varphi = \psi f$.

Предположим теперь, что $0 \neq fA \subseteq Ker\varphi$ для некоторых $f, \varphi \in E(A)$, причем $r_p(Ker\varphi) = 1$. Покажем, что найдется $0 \neq \psi \in E(A)$ со свойствами $Ker\varphi \subset Ker\psi$ и $r_p(Ker\psi) > 1$. Для $0 \neq \varphi g$ в силу леммы 1, 3) найдется $0 \neq y \in fA$, $\chi(y) \geq \chi(\varphi g)$. Тогда если $\beta\varphi g = y$, где $\beta \in E(A)$ – такой, что $\beta\varphi b \notin Ker\varphi$ для некоторого $b \in A$, то $\langle Ker\varphi, g\rangle_* \subseteq Ker\varphi\beta\varphi$, в силу квазиоднородности подгруппа $\langle Ker\varphi, g\rangle_*$ имеет p-ранг 2. Допустим, что $\beta\varphi A \subseteq Ker\varphi$ для каждого такого β, причем $r_p(Ker\beta\varphi) = 1$, $\beta\varphi \notin pE(A)$. Найдется $x \in A$ со свойствами $\varphi x \in A \setminus pA$ и $n = h_p(\beta\varphi x) > 0$. В противном случае $r_p(\beta\varphi A) = r_p(A)$, что противоречит условию $r_p(Ker\beta\varphi) = 1$. Если теперь $p^n\gamma\varphi x = \beta\varphi x$, то $\langle Ker\varphi, x\rangle_* \subseteq Ker\psi$, где $\psi = p^n\gamma\varphi - \beta\varphi \neq 0$.

Покажем, что найдутся $G = \langle g, F\rangle_*^A$, $\eta \in E(G)$ такие, что $\eta g \neq 0$, F – свободная счетного ранга p-сервантная подгруппа из $Ker\eta$. Если $0 \neq f \in E(A)$, то пусть S – p-базисная подгруппа в $Kerf \neq 0$. Вложим ее в p-базисную подгруппу группы A в качестве прямого слагаемого $S \oplus K$. Предположим, что нашелся такой f, что $\chi(g) = \chi(fg)$ для каждого $g \in K$ с условием $fg \neq 0$. В этом случае подгруппа $Kerf \oplus \langle g\rangle_*^A$ сервантна в A. Поэтому если ранг S бесконечен, то $\eta = f$. В противном случае в K найдется прямое слагаемое F бесконечного ранга такое, что $F \cap Kerf = 0$. Тогда подгруппа $B = Kerf \oplus \langle F\rangle_*^A$ сервантна в A. В качестве η можно взять проекцию B на $Kerf$ с ядром бесконечного p-ранга $\langle F\rangle_*^A$. Допустим, что такого f не существует. Тогда предварительно покажем, что найдется $f \in E(A)$ и p-сервантная подгруппа $\langle a\rangle \oplus \langle g\rangle \oplus \langle x\rangle$ в A такая, что $fa = 0$, $fg \neq 0$ и $\chi(x) \geq \chi(fg)$. Возьмем, как и выше, $f \in E(A)$, $Kerf \neq 0$. По условию $n = h_q(fg) > h_q(g)$ для некоторого $g \in K \setminus pK$ и простого числа q. Имеем $\langle Kerf, g\rangle_* \subseteq Ker\psi$, где $\psi = (q^n\beta - f)f$, $\beta \in E(A)$, $q^n\beta g = fg$. Если $\psi \notin pE(A)$, то за x можно взять любой элемент со свойством $\chi(x) \geq \chi(fg)$ и $\psi x \in A \setminus pA$. Из леммы 1, 3) следует, что такой x найдется. В качестве a – любой из $Kerf \setminus pA$. Если же $fA \subseteq Ker\varphi$, где $\varphi = q^n\beta - f$, то согласно вышедоказанному можно считать, что $r_p(Ker\varphi) > 1$. Тогда $f = \varphi$, g – любой элемент такой, что $\varphi g \in A \setminus pA$, x – любой элемент из $Ker\varphi \setminus pA$ со свойством $\chi(x) \geq \chi(\varphi g)$, a – любой элемент из прямого дополнения к $\langle x\rangle$ в p-базисной подгруппе группы $Ker\varphi$.

Вложим $\langle a\rangle \oplus \langle g\rangle \oplus \langle x\rangle$ в p-базисную подгруппу B группы A в качестве прямого слагаемого $B = \langle a\rangle \oplus H \oplus F$, где $H = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle$, $g \in F$. Если $\overline{A}$ – p-адическое пополнение группы A, то $\overline{A} = R \oplus G$, где $R = \overline{\langle a\rangle}$, G – p-адическое пополнение $H \oplus F$. Группа R имеет ранг $2^{\aleph_0}$, выделим в ней счетную линейно независимую систему элементов $g_i\,(i = 1, 2, \ldots)$. Отображение $b_i \to g_i$ продолжается до гомоморфизма $H \to R$. Так как группа R p-сервантно инъективна, то этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\varphi : \overline{H} \to R$. Если π и θ – проекции $M = R \oplus \overline{H}$ на R и $\overline{H}$ соответственно, то $M = R \oplus K$, где $K = (\theta - \pi\varphi\theta)M$ [1, лемма 9.5]. Имеем $b_i = (\pi + \pi\varphi\theta)b_i + (\theta - \pi\varphi\theta)b_i$ $= \varphi b_i + (b_i - \varphi b_i)$, где $b_i - \varphi b_i \in K$. Следовательно, $H \cap K = \langle H\rangle_*^A \cap K = 0$.

Далее, $\overline{A} = (R \oplus \overline{\langle g\rangle}) \oplus K \oplus C$. Если α – проекция $\overline{A}$ на $R \oplus \overline{\langle g\rangle}$, то $(\beta\overline{f}\alpha)(\langle H, g\rangle_*^A) \subseteq \langle \beta f g\rangle_*^A \subseteq \langle H, g\rangle_*^A$, где $\overline{f} \in E(\overline{A})$ – продолжение f, $\beta \in E(A)$, $\beta f g = x$. Так как A – $SQPI$-группа, то этот эндоморфизм продолжается до ее эндоморфизма, ядро которого содержит H и, следовательно, имеет бесконечный p-ранг.

Итак, G и η существуют. Так как F – свободная группа бесконечного ранга, то в F найдется подгруппа K такая, что F/K – редуцированная группа без кручения ранга 1, q-делимая для каждого простого $q \neq p$. Поскольку замыкание F^- в p-адической топологии A ее p-сервантной подгруппы F является сервантной подгруппой, то $H = K^- \subset F^-$ и, так как $F \nsubseteq H$, F^-/H содержит сервантную подгруппу $G/H \cong F/K$. Пусть $b + H \in (G/H) \setminus p(G/H)$. В силу квазиоднородности $n = h_p(\eta g) < \infty$. Пусть $D = \langle p^k g + b, H\rangle_*$, где $k > n$. Тогда D/H – группа ранга 1 и $\chi_{A/H}(p^k g + b + H) \leq \chi_A(\eta g)$. Если $\pi : D \to D/H$ – естественный эпиморфизм, а $\psi : D/H \to \langle x\rangle_*$ – такой гомоморфизм, что $\psi(p^k g + b + H) = p^m x$, то, так как A – $SQPI$-группа, $\psi\pi$ продолжается до некоторого $\alpha \in E(A)$. Имеем $\alpha(p^k g + b) = p^n x$, причем $\alpha b \neq 0$, так как $k > n$. Подгруппа $\langle \alpha b\rangle_*^A$ q-делима для каждого простого $q \neq p$. В силу квазиоднородности A также q-делима для всех таких q. Следовательно, A – однородная разложимая $SQPI$-группа бесконечного p-ранга. Из теоремы 12 следует, что она алгебраически компактна.

Предложение 14. *Если A – квазиоднородная вполне транзитивная $SQPI$-группа с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, то все ее ненулевые эндоморфизмы суть мономорфизмы.*

Доказательство. Если A имеет конечный p-ранг для некоторого $p \in \Pi(A)$, то справедливость предложения следует из вполне транзитивности A [9, следствие 5]. Если же p-ранг бесконечен, то достаточно сослаться на предложение 13.

Лемма 15. *Если A – редуцированная вполне транзитивная группа без кручения, то $\Pi(A/p^\omega A) \cap \Pi(p^\omega A) = \emptyset$ для любого $p \in \Pi(A)$.*

Доказательство. Предположим, что $q \in \Pi(A/p^\omega A) \cap \Pi(p^\omega A)$, $p^\omega A \neq 0$. Тогда $q^\omega A \neq p^\omega A$. Возьмем $b \in p^\omega A$ со свойством $h_q(b) = 0$. Найдется такой элемент a, что $h_q(a) = 0$ и $\psi_p a + p^\omega A \notin q^\omega(A/p^\omega A)$, где $\psi_p = 1_A - p\varphi_p$, а φ_p – продолжение деления $p^\omega A$ на p. В противном случае группа $A/p^\omega A$ q-делима. Имеем $\psi_p(q^n a + b) = q^n\psi_p a$, где $n > h_q(\psi_p^2 a)$. Если теперь $f \in E(A)$ – такой, что $f(q^n a + b) = \psi_p a$, то $q^n\psi_p f a = \psi_p^2 a$. Противоречие с выбором n.

Теорема 16. *Редуцированная вполне транзитивная группа без кручения является $SQPI$-группой тогда и только тогда, когда*
$\bigoplus_{p\in\Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in\Pi} A_p = S$, где A – сервантная вполне характеристическая подгруппа в S, Π – некоторое множество простых чисел, $\Pi(A_p) \cap \Pi(A_q) = \emptyset$ при $p \neq q$, $p, q \in \Pi$, а A_p – однородные QPI-группы, или квазиоднородные вполне транзитивные $SQPI$-группы, все ненулевые эндоморфизмы которых – мономорфизмы.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 3. Необходимость. Если $0 \neq p^\omega A \neq A$, то согласно лемме 9 $A = A_p \oplus p^\omega A$, $\Pi(A_p) \cap \Pi(p^\omega A) = \emptyset$. В частности, A_p вполне характеристична. Если $q \neq p$, то $q^\omega A = (A_p \cap q^\omega A) \oplus (p^\omega A \cap q^\omega A)$, $A_p \cap q^\omega A = q^\omega A_p$, $A_p = q^\omega A_p \oplus A'_p$. Поэтому, если $q^\omega A_p, A'_p \neq 0$, то $p \in \Pi(A'_p) \cap \Pi(q^\omega A_p)$, что противоречит лемме 15. Значит, каждая A_p квазиоднородна. Следовательно, для любых p и q $A_p = A_q$, либо $A_q \subseteq p^\omega A$. Значит, если $A_p \cap A_{p_i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $A_p \cap (A_{p_1} + \ldots + A_{p_n}) = 0$. Поэтому найдется такое множество Π простых чисел, что подгруппа, порожденная всеми A_p, совпадает с сервантной подгруппой $S = \bigoplus_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi(A_p) \cap \Pi(A_q) = \emptyset$ при $p \neq q$. Так как для любого p факторгруппа A/A_p p-делима, то группа A/S делима. Проекции $A \to A_p$ индуцируют гомоморфизм $A \to \prod_{p \in \Pi} A_p = V$, являющийся в силу редуцированности мономорфизмом. Он действует на S тождественно. Отождествим A с ее образом. Поскольку делимая группа A/S сервантна в V/S, то A сервантна в V, причем A плотна в V. Если теперь $\varphi \in E(V)$, то $\varphi S \subseteq S$. Поэтому существует $\psi \in E(A)$, $\psi|S = \varphi|S$. В силу плотности S в A и редуцированности V $\varphi|A = \psi$, т.е. $\varphi A \subseteq A$ и, значит, A вполне характеристична в V. Ввиду [6, теорема 2.1] осталось доказать теорему в квазиоднородном случае.

Пусть A квазиоднородна. Предположим, что A имеет ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми ядрами. Тогда в силу предложения 14 A содержит квазиразложимые сервантные подгруппы. Теперь так же, как в [9, теорема 8], доказывается однородность A. По теореме 12 A является QPI-группой.

Если все подгруппы A_p в теореме 16 есть QPI-группы, то A – QPI-группа [6]. Отметим еще, что если A – такая вполне транзитивная группа без кручения, что все ненулевые гомоморфизмы $G \to A$ любой ее сервантной подгруппы G суть мономорфизмы, то, как легко видеть, A есть QPI-группа.

Следствие 17. *Если A – QPI-группа без кручения (однородная $SQPI$-группа), то A неразложима $\iff$ A квазиоднородна и все ее сервантные подгруппы сильно неразложимы $\iff$ все ее ненулевые эндоморфизмы – мономорфизмы. Если A – квазиоднородная QPI-группа, то A разложима $\iff$ A – однородная разложимая группа.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974; Т. 2. М.: Мир, 1977.

[2] Arnold D.M., O'Brien B, Reid J.D. Quasi-pure injective and projective torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. т 3. P. 532-544.

[3] Добрусин Ю.Б. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. С. 45-69.

[4] Крылов П.А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. т 7. Томск, 1988. С. 81-99.

[5] Крылов П.А. Об одном классе квазисервантно инъективных абелевых групп // Матем. заметки. 1989. Т. 45. т 4. С. 53-58.

[6] Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения // Матем. заметки. 1989. Т. 46. т 3. С. 93-99.

[7] Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. т 10. Томск, 1991. С. 157-178.

[8] Беккер И.Х.,Крылов П.А.,Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули. т 11,12. Томск, 1994. С. 3-52.

[9] Чехлов А.Р. Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Матем. заметки. 2000. Т. 68. т 4. С. 587-592.

[10] Добрусин Ю.Б. О продолжении частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. т 4. Томск, 1986. С. 45-69.

[11] Чехлов А.Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. т 6. С.

[12] Кожухов С.Ф. Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1980. С. 91-101.