О квазиполных смешанных группах

А.Р. ЧЕХЛОВ

Томский государственный университет

Аннотация

УДК 512.541

Ключевые слова: сервантная подгруппа, прямое слагаемое, p-адическая и Z-адическая топологии

Аннотация

Получено описание смешанных абелевых групп, в которых замыкание в Z-адической и p-адической топологии для каждого простого p любой сервантной подгруппы является прямым слагаемым исходной группы.

Abstract

A.R. Chekhlov, On quasi-closed mixed groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol.

The description of mixed abelian groups in which the closure in the Z-adic and p-adic topology for every prime p of any pure subgroup is a direct summand of the initial group is obtained.

Введение

Абелеву группу A назовем qc-группой (cs-группой), если замыкание в Z-адической и p-адической топологии для каждого простого числа p любой ее сервантной подгруппы является сервантной подгруппой (прямым слагаемым) в A. Ясно, что изучение cs-групп сводится к редуцированному случаю. Периодические qc-группы — это в точности квазиполные группы, рассматривавшиеся в ряде работ (см. в [1, § 5; 2 § 74] и др.). Всякая группа без кручения является qc-группой. В § 2 изучаются смешанные qc-группы. cs-группы без кручения введены и исследовались автором [3-6]. В обзоре [7, § 2] поставлены вопросы изучения свойств cs-групп. Из [2, предложение 74.9] следует, что периодическая группа является cs-группой тогда и только тогда, когда она периодически полна. Всякая алгебраически компактная группа является cs-группой [2, § 39]. В § 3 получено описание смешанных cs-групп.

Все группы в статье — абелевы. Если A — группа, то обозначим через tA — ее периодическую часть; A_p — ее p-компоненту; $p^\omega A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n A$; $A^1 = \bigcap\limits_p p^\omega A$; $E(A)$ — кольцо ее эндоморфизмов; $r_p(A)$ — p-ранг, т.е. ранг ее факторгруппы A/pA; $\gamma_p(A)$ — ее p-ранг без кручения, т.е. ранг без кручения [2, § 16] ее p-базисной подгруппы; $\Pi(A)$ — множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $A[n] = \{a \in A \,|\, na = 0\}$; $o(a)$ — период ее элемента a; $S(A)$, соответственно $S_p(A)$, — множество всех ее сервантных, соответственно p-сервантных подгрупп; $H^\wedge$ (соответственно $H^-_{p,A}$) — замыкание в Z-адической (соответственно в p-адической) топологии группы A ее подмножества H, индекс A иногда опускаем. Группу A назовем p-редуцированной, если она не содержит ненулевых p-делимых подгрупп. Если $p^\omega A = 0$, то A p-редуцирована; если A — qc-группа, то обратное утверждение справедливо для всех простых p.

§ 1. Вспомогательные результаты

Приведем несколько простых утверждений.

Лемма 1.1. *Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), где $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, H — замкнутая в Z-адической топологии подгруппа в A, то $H = \bigoplus_{i \in I}(H \cap A_i)$ ($H = \prod_{i \in I}(H \cap A_i)$). Поэтому A является qc-группой (cs-группой) тогда и только тогда, когда каждая A_i есть qc-группа (cs-группа).*

Доказательство. Вытекает из того, что если $A = B \oplus G$, где $\Pi(B) \cap \Pi(G) = \varnothing$, и $x = b+g \in H$, $b \in B$, $g \in G$, то $b+H = -g+H \in (A/H)^1 = 0$.

Лемма 1.2. *Пусть A — произвольная группа, G — ее подгруппа. Тогда*

1) *если $G^-_p \in S_p(A)$ (эквивалентно $G^-_p \in S(A)$), то $G^\wedge \in S_p(A)$;*

2) *если для каждого простого p условие $G \in S_p(A)$ влечет $G_p^- \in S_p(A)$, то из $G \in S(A)$ следует $G^\wedge \in S(A)$. В частности, если $p^\omega A \in S_p(A)$ (эквивалентно $p^\omega A \in S(A)$) для каждого простого p, то $A^1 \in S(A)$, т.е. A^1 является делимой частью группы A;*

3) *если подгруппа A_p периодически полна, то $p^\omega A \in S_p(A)$, т.е. является p-делимой подгруппой.*

Доказательство. 1) Если $p^m x = g \in G^\wedge$, то по условию $g = p^m z$ для некоторого $z \in G_p^-$. Поскольку $G^\wedge = \bigcap\limits_q G_q^-$, то для ее сервантности достаточно показать, что $z \in G_q^-$ для каждого простого $q \neq p$. Имеем $g = p^m z = b_n + q^n y_n$, где $b_n \in G, y_n \in A$. Если теперь s_n, t_n — такие целые числа, что $p^m s_n + q^n t_n = 1$, то $z = s_n b_n + q^n(s_n y_n - t_n z)$. Поскольку это справедливо для каждого натурального n, то $z \in G_q^-$. Аналогичные рассуждения показывают, что $(A/G_p^-)_q = 0$ для каждого простого $q \neq p$, значит, $G_p^- \in S_q(A)$. Это доказывает 1). 2) непосредственно следует из 1).

3) Так как A_p периодически полна, то $p^\omega(A_p)$ совпадает с ее делимой частью D, $D \oplus B = A_p$. Имеем $A = D \oplus C$, $A_p = D \oplus (A_p \cap C)$, $p^\omega A = D \oplus p^\omega C$, где $p^\omega C = (p^\omega A) \cap C$. Группа $A_p \cap C$ как прямое слагаемое в A_p также периодически полна. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $p^\omega(A_p) = 0$. Покажем, что $p^\omega A \in S_p(A)$. Пусть $p^m x = a \in p^\omega A$. Для любого натурального n имеем $a = p^{n+m} a_n$, $a_n \in A$, и $b_n = x - p^n a_n \in A[p^m]$. Поскольку $b_{n+1} - b_n = p^n(a_n - p a_{n+1})$, то в силу периодической полноты группы A_p последовательность $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к некоторому $b \in A_p$. Получаем $b - b_n \in p^n A_p$ и, т.к. $p^\omega(A_p) = 0$, то $p^m b = 0$. Откуда $x - b \in p^\omega A$ и $p^m(x - b) = a$.

Лемма 1.3. *Пусть A — произвольная группа и $G \in S_p(A)$. Тогда*

1) $G+B \in S_p(A)$ для любой такой подгруппы $B \in S_p(A)$, что $G_p \subseteq B$, а факторгруппа B/B_p является p-делимой;

2) p-компонента $(G_p^-)_p$ замыкания G_p^- совпадает с подгруппой F, где $F = (G_p)^\wedge_{A_p}$ является замыканием p-компоненты G_p подгруппы G в Z-адической топологии группы A_p;

3) если $A = B \oplus D$ и $B_p = 0$, то $G \cap D \in S_p(A)$;

4) если $G_p = 0$ и $p^\omega A$ — подгруппа без кручения, то подгруппа G_p^- также без кручения;

5) если факторгруппа A/A_p является p-делимой, то G/G_p также p-делима и условие $p^\omega A = 0$ влечет неограниченность G_p или равенство $G_p = G$.

Доказательство. 1) Пусть $p^n x = g + b$, где $g \in G$, $b \in B$, а $x \in A$. Так как $G_p \subseteq B$, то можно считать, что $g \notin G_p$ В силу p-делимости факторгруппы B/B_p для элемента b найдутся такие элементы $z \in B_p$, $a \in B$, что $b = z + p^n a$.

Если $o(z) = p^m$, то $p^{n+m}(x - a) = p^m g = p^{n+m} y$ для некоторого $y \in G$. Откуда $c = g - p^n y \in G_p \subseteq B$ и $p^n(x - y) = c + b = p^n d$, где $d \in B$. Имеем $y + d \in G + B$ и $p^n(y + d) = p^n x$. В частности, если $G \in S(A)$, то $G + B \in S(A)$ для любой такой $B \in S(A)$, что $tG \subseteq B$ и B/tB делима.

2) Пусть $x \in G_p^-$. Тогда для каждого натурального n имеем $x = g_n + p^n a_n$, где $g_n \in G$, $a_n \in A$. Если $p^m x = 0$, то $p^m g_n = -p^{n+m} y_n$ для некоторых $y_n \in G$. Отсюда $g_n - p^n y_n = z_n \in G[p^m]$. Получаем $x = z_n + p^n(y_n + a_n) \in (G_p)^-_{p,A_p}$. Теперь утверждение вытекает из того, что p-адическая топология в силу q-делимости группы A_p для каждого простого числа $q \neq p$ совпадает с Z-адической топологией.

3) Достаточно показать, что $G \cap D \in S_p(G)$. Если $p^n x = g \in G \cap D$, $x \in G$, то $x = b + y$, $b \in B$, $y \in D$. Так как $p^n b = 0$, то $b = 0$. Получаем $x = y \in G \cap D$. Таким образом, если $tB = 0$, а $G \in S(A)$, то $G \cap D \in S(A)$.

4) Пусть $x \in G_p^-$, $x = g_n + p^n a_n$, $g_n \in G$, $a_n \in A$. Так как подгруппа $p^\omega A$ без кручения, то $A_q = 0$ для каждого простого $q \neq p$. Поэтому если $o(x) < \infty$, то $o(x) = p^m$ для некоторого натурального m. Имеем $p^m g_n = -p^{n+m} a_n = p^{n+m} b_n$, $b_n \in G$. Поскольку $G_p = 0$, то $g_n = p^n b_n$. Откуда $x \in (p^\omega A)_p = 0$. Следовательно, если $G \in S(A)$ и G, A^1 — подгруппы без кручения, то $G^\wedge$ также без кручения.

5) В силу 1) $G + A_p \in S_p(A)$. Поэтому $(G + A_p)/A_p \cong G/G_p$ — p-делимая группа. Следовательно, в силу условия $p^\omega A = 0$ подгруппа G_p не может служить собственным прямым слагаемым в G.

§ 2. Смешанные qc-группы

Приведем несколько простых замечаний, поясняющих это понятие.

1) *Редуцированная группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда для любой $G \in S(A)$ утверждение “G замкнута в Z-адической топологии"(соответственно в p-адической топологии) эквивалентно утверждению “A/G — редуцированная группа"(соответственно p-редуцированная группа).*

Заметим, что из равенства $G^\wedge/G = (A/G)^1$ следует, что $G^\wedge \in S(A)$ в том и только в том случае, когда $(A/G)^1 \in S(A/G)$. А это имеет место тогда и только тогда, когда $(A/G)^1$ — делимая группа. Аналогичные рассуждения справедливы для второго утверждения.

2) *Если A — qc-группа, то A^1 — ее делимая часть.*

Это следствие того, что $0^\wedge = A^1$.

3) *Любая группа без кручения является qc-группой. Периодическая группа является qc-группой тогда и только тогда, когда она квазиполна.*

4) *Группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда для каждого простого p условие $G \in S_p(A)$ влечет $G_p^- \in S_p(A)$.*

Достаточность этого утверждения вытекает из леммы 1.2, п. 1).

Необходимость. Пусть $T/G = \bigoplus_{q \neq p} (A/G)_q$ — периодическая часть факторгруппы A/G, за исключением p-компоненты. Тогда q-компоненты $(A/T)_q$ факторгруппы A/T равны нулю для всех простых чисел $q \neq p$. Поэтому подгруппа $T \in S_q(A)$ для $q \neq p$. Так как $T/G \in S_p(A/G)$, а $G \in S_p(A)$, то $T \in S_p(A)$. Следовательно, $T \in S(A)$. Далее, T/G есть p-делимая группа, поэтому $T_p^- = G_p^-$. Значит, $G_p^- \in S(A)$ как замыкание сервантной подгруппы T.

5) *В группе A утверждение “$G \in S_p(A)$ влечет $G_p^- \in S(A)$"справедливо в том и только в том случае, когда соответствующее утверждение выполняется в $A/p^\omega A$, причем $p^\omega A \in S(A)$.*

Следует из того, что $0_p^- = p^\omega A \subseteq G_p^-$ для любой подгруппы G в A.

6) *Редуцированная группа A является qc-группой тогда и только тогда, когда tA — квазиполная группа, $A^1 = 0$ и для каждого простого p условие “$H \in S_p(A)$ — подгруппа без кручения (включая $H = 0$)"влечет $H_p^- \in S_p(A)$.*

Квазиполнота tA следует из леммы 1.3, п. 2). Достаточность. Имеем $p^\omega A = 0_p^- \in S(A)$. Поэтому, учитывая 5), будем считать, что $p^\omega A = 0$. В частности, $A_q = 0$ для всех простых $q \neq p$. Пусть $G \in S_p(A)$ и $G_p \neq 0$. Нужно показать, что $G_p^- \in S_p(A)$. Если $D = (G_p)^\wedge_{A_p}$, то D/G_p — делимая p-группа (поскольку tA — квазиполная группа), поэтому $A/G_p = D/G_p \oplus$

R/G_p и $D \in S_p(A)$. Так как $G/G_p \cap D/G_p = 0$, то R/G_p можно выбрать такой, что $G/G_p \subseteq R/G_p$. Далее $G_p^- = D + N$, где $N = G_{p,R}^-$ и N/G_p совпадает с замыканием G/G_p в R/G_p. Поэтому достаточно показать, что $N \in S_p(R)$, а это влечет $N \in S_p(A)$. Тогда по лемме 1.3, п. 1) будет следовать, что $D + N \in S_p(A)$. Имеем $N/G = p^\omega(R/G)$ и $A_p/G_p = D/G_p \oplus R_p/G_p$, где $G/G_p \cap R_p/G_p = 0$. Поскольку $G \in S_p(A)$, то $(R/G)_p \cong R_p/G_p$. Если G_p — неограниченная подгруппа, то факторгруппа A_p/G_p периодически полна [2, предложение 74.5]. Поэтому по лемме 1.2, п. 3) $N/G = p^\omega(R/G) \in S_p(R/G)$, значит, $N \in S_p(R)$. Если же G_p ограничена, то $A = G_p \oplus B,\ G = G_p \oplus (G \cap B)$, причем $G \cap B \in S_p(A)$ — подгруппа без кручения и $G_p^- = G_p \oplus (G \cap B)_p^-$, где $(G \cap B)_p^- \in S_p(A)$ (по условию). Значит, опять $G_p^- \in S_p(A)$.

Свойство 3) сводит изучение qc-групп к смешанному случаю. Справедлива

Теорема 2.1. *Пусть A — редуцированная смешанная qc-группа с бесконечным $\gamma_p(A)$ и $p^\omega A \in S(A)$. Тогда A_p периодически полна.*

Доказательство. Отметим, что $\gamma_p(A) = \gamma_p(A/p^\omega A)$ и $(A/p^\omega A)_p \cong A_p$ (т.к. $p^\omega A \in S(A)$ и $(p^\omega A) \cap A_p = p^\omega(A_p) = 0$). Поэтому, учитывая 5), будем считать, что $p^\omega A = 0$. Если $\gamma_p(A)$ бесконечен, то найдется подгруппа $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle \in S_p(A)$, где $o(b_i) = \infty$. Положим $g_i = b_i - pb_{i+1}$. Тогда $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\langle g_i\rangle \in S_p(A)$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность Коши группы A_p в ее p-адической топологии и $p^m a_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots)$. Если $a_{i+1} - a_i = p^i x_i$, то $\bigoplus_{i=1}^{\infty}\langle g_i - x_{i-1}\rangle \in S_p(A)$, где $x_0 = a_1$. По лемме 1.3, п. 4) замыкание F в p-адической топологии этой подгруппы — подгруппа без кручения из $S(A)$. Поэтому $F \oplus A_p \in S(A)$ по лемме 1.3, п. 1).

Имеем $g_i = (g_i - x_{i-1}) + x_{i-1}$, где $g_i - x_{i-1} \in F$, $x_{i-1} \in A_p$. Так как $b_1 = (g_1 + pg_2 + \ldots + p^{i-1}g_{i-1}) + p^i b_i$ и $p^m g_1 + p^{m+1}g_2 + \ldots + p^{m+i-1}g_{i-1} \in F$, то $p^m b_1 \in F$. Отсюда $b_1 \in F \oplus A_p$ и, значит, последовательность $\{a_i = a_1 + px_1 + \ldots + p^{i-1}x_{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в A_p, т.е. A_p периодически полна.

Следствие 2.2. 1) *Копериодическая группа является qc-группой тогда и только тогда, когда она алгебраически компактна;*

2) *если A_p — прямое слагаемое в A для каждого простого числа p, то A является qc-группой тогда и только тогда, когда tA — квазиполная группа, причем бесконечность $\gamma_p(A)$ влечет периодическую полноту подгруппы A_p;*

3) *пусть A — такая смешанная группа, что tA периодически полна. Тогда A является qc-группой;*

4) *редуцированная qc-группа A изоморфна некоторой сервантной подпрямой сумме групп A_i, где $p_i^{\omega}A_i = 0$, i пробегает некоторое множество Π простых чисел, $(A_i)_{p_i} \cong A_{p_i}$ и $G^-_{p_i,A_i} \in S_{p_i}(A_i)$ для любой $G \in S_{p_i}(A_i)$.*

Доказательство. Для qc-группы A подгруппа A^1 делима, что в силу [2, предложение 54.2] доказывает 1).

2) Если $A = A_p \oplus C$, то $p^{\omega}A = (p^{\omega}A \cap A_p) \oplus p^{\omega}C$. Здесь $p^{\omega}A \cap A_p = p^{\omega}(A_p)$ — делимая группа (в силу квазиполноты A_p), а $p^{\omega}C$ — p-делимая подгруппа, т.к. $C_p = 0$. Итак, для каждого простого числа p подгруппа $p^{\omega}A$ является p-делимой. Поэтому, учитывая свойство 5), будем предполагать, что $p^{\omega}A = 0$. Пусть теперь $H \in S_p(A)$ является подгруппой без кручения. Тогда $(A/H)_p \cong A_p$. Если A_p периодически полна, то по лемме 1.2, п. 3) $p^{\omega}(A/H) = H_p^-/H \in S_p(A/H)$. Отсюда следует, что $H_p^- \in S_p(A)$. Пусть теперь A_p не периодически полная группа.

Тогда если $\gamma_p(H) = n$, то пусть $F = \langle g_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle g_n \rangle$ — p-базисная подгруппа в H. Если $g_i = a_i + c_i$, где $a_i \in A_p, c_i \in C$, то элементы $a_1, \ldots, a_n$ содержатся в конечной сервантной подгруппе $K \subseteq A_p$. Имеем $A_p = K \oplus N$ и $F \oplus K = K \oplus R$, где $R = (F \oplus K) \cap C$. Согласно лемме 1.3, п. 1) $F \oplus K \in S_p(A)$. Поэтому $R \in S_p(C)$. Заметим, что $(F \oplus K)_p^- = K \oplus R_p^-$, где $R_p^- \in S_p(C)$ как замыкание p-сервантной подгруппы группы без кручения C. Поэтому $(F \oplus K)_p^- \in S_p(A)$. Поскольку K — конечная группа, то $p^s K = 0$ для некоторого натурального s. Имеем $p^s(F_p^-) = (p^s F)_{p,p^s A}^- = p^s(R_p^-) = (p^s R)_{p,p^s A}^- \in S_p(p^s A)$. Так как F_p^- — подгруппа без кручения по лемме 1.3, п. 4), то $F_p^- \in S_p(A)$.

3) Согласно лемме 1.2, п. 3) $p^\omega A \in S_p(A)$. Поэтому данное свойство доказывается аналогично соответствующей части доказательства п. 2)

4) Если A — qc-группа, то в качестве A_i возьмем $A/p_i^\omega A$. Поскольку $\bigcap\limits_p p^\omega A = A^1 = 0$, то эпиморфизмы $\pi_i : A \to A_i$ индуцируют мономорфизм $A \to \prod_{i \in I} A_i$. Отождествим A с образом при этом мономорфизме, этот образ — сервантная подгруппа, т.к. $h_p^A(a) = h_p^{A/p^\omega A}(a + p^\omega A)$ для любого $a \in A$, что доказывает 4).

§ 3. Смешанные cs-группы

Будем говорить, что идемпотенты π, θ кольца $E(A)$ группы A эквивалентны, если $\pi A = \theta A$. Отметим, что если A — qc-группа, то A является cs-группой тогда и только тогда, когда $G^\wedge$ — прямое слагаемое в A для каждой $G \in S(A)$. Напомним, что группа без кручения A называется квазиоднородной, если $\Pi(A) = \Pi(G)$ для любой ненулевой $G \in S(A)$.

Строение cs-групп без кручения раскрывается в следующей теореме

Теорема 3.1 [4; теоремы 2.1, 2.3]. *Всякая редуцированная cs-группа* *без кручения A представима в виде $\bigoplus_{p\in\Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in\Pi} A_p = \overline{S}$, где A — такая сервантная подгруппа в $\overline{S}$, что $E(A)$ вкладывается в кольцо $E(\overline{S})$ и содержит хотя бы один элемент из каждого класса эквивалентных идемпотентов этого кольца; Π — некоторое множество простых чисел; $\Pi(A_{p_1}) \cap \Pi(A_{p_2}) = \emptyset$ при $p_1 \neq p_2$; $p_1, p_2 \in \Pi$; а A_p — квазиоднородные p-редуцированные cs-группы, однозначно определяемые по группе A.*

Следствие 3.2 [4; следствие 2.2, лемма 2.4]. *Всякая p-редуцированная cs-группа без кручения A квазиоднородна, причем бесконечность p-ранга группы A влечет ее q-делимость для каждого простого $q \neq p$.*

Значение теоремы 3.1 состоит и в том, что она, в частности, сводит изучение cs-групп без кручения к квазиоднородному случаю. Квазиоднородные cs-группы также исследовались в [4-6]. Перейдем к смешанным cs-группам.

Предложение 3.3. *Пусть A — такая смешанная группа, что $p^{\omega}A = 0$, ее периодическая часть $T = tA$ — является p-группой и факторгруппа A/T делима. Тогда A является cs-группой тогда и только тогда, когда T периодически полна и A — такая сервантная подгруппа своего p-адического пополнения $\widehat{A}$, что $E(A) \subseteq E(\widehat{A})$, причем $E(A)$ содержит хотя бы один представитель из каждого класса эквивалентных идемпотентов кольца $E(\widehat{A})$.*

Доказательство. Необходимость. Периодическая часть cs-группы A, как ее сервантная вполне характеристическая подгруппа, также является cs-группой. Откуда следует периодическая полнота группы T. Так как по условию A/T делима и T является p-группой, то $qA = A$ для каждого простого $q \neq p$. Поэтому A можно рассматривать как сервантную подгруппу в $\widehat{A}$, а $E(A)$, в силу сервантной инъективности $\widehat{A}$, как подкольцо в $E(\widehat{A})$, причем $E(\widehat{A})$ можно отождествить с $E(T)$. Пусть $\widehat{A} = B \oplus G$. Тогда $T = (T \cap B) \oplus (T \cap G)$, где $T \cap B = tB$ плотна в B, $K = (tB)^{\wedge}_{A}$ — прямое слагаемое в $A = K \oplus N$. Имеем $\widehat{A} = \widehat{K} \oplus \widehat{N}$, где $B = \widehat{K} = \widehat{tB}$. Поэтому если π — проекция A на K, то $\pi\widehat{A} = B$ (считаем, что $\pi \in E(\widehat{A})$).

Достаточность. Пусть $G \in S(A)$. Тогда $\widehat{G}$ — прямое слагаемое в $\widehat{A}$. Если π — проекция $\widehat{A}$ на $\widehat{G}$ такая, что $\pi \in E(A)$, то $A = \pi A \oplus (1-\pi)A$, где $\pi A = A \cap \widehat{G} = G^{\wedge}_{A}$.

Предложение 3.4. *Если B — p-редуцированная cs-группа без кручения, F — cs-группа из предложения* 3.3 (*соответственно — редуцированная периодически полная p-группа*), *то $A = B \oplus F$ является cs-группой тогда и только тогда, когда*

1) *для любых $b \in B$, $g \in F$ со свойствами $h_p(b) \le h_p(g)$ и $o(g) = \infty$ существует гомоморфизм $f : B \to F$ такой, что $fb = g$;*

2) *бесконечность p-ранга B влечет алгебраическую компактность* (*соответственно ограниченность*) *F.*

Доказательство. Необходимость. Для элементов b, g из 1) без ограничения общности считаем, что $b \in B \setminus pB$. Тогда $\langle b + g\rangle \in S_p(A)$, $A = K \oplus N$, где $K = \langle b+g\rangle^{-}_{p}$. Так как $tA = (tA \cap K) \oplus (tA \cap N)$, а по лемме 1.3, п. 4) $tA \cap K = 0$, то $tA = tN$. Откуда $F \subseteq N$. В качестве f можно взять $f = (\theta\pi)|B$, где π, θ — проекции группы A на K, F соответственно. Используя тот факт, что A является cs-группой и лемму 1.3, п. 4), получим, что замыкание p-сервантной подгруппы без кручения является прямым слагаемым в A без кручения. Периодическая часть будет содержаться в дополнительном прямом слагаемом к этому замыканию. Поэтому если $r_p(B) = \infty$, то так же, как в теореме 2.1, можно показать, что уже всякая последовательность Коши элементов из F_p сходится в F. Поскольку F_p плотна в F, то F полна в своей p-адической топологии, следовательно, является p-адической алгебраически компактной группой. Осталось только напомнить, что редуцированная периодическая алгебраически компактная группа является ограниченной группой [2, следствие 40.3].

Достаточность. Так как $qF = F$ для каждого простого числа $q \neq p$, а B — cs-группа, то, очевидно, нужно показать только то, что G_p^- — прямое слагаемое в A, где $G \in S_p(A)$, и то же для $G^\wedge$, где $G \in S(A)$. Пусть $G \in S_p(A)$. Тогда по лемме 1.3, п. 3) $G \cap F \in S_p(A)$. Имеем $F = (G \cap F)_p^- \oplus M$, причем $V = (G \cap F)_p^- + G \in S_p(A)$, т.к. факторгруппа $V/G \cong (G \cap F)_p^-/(G \cap F)$ является p-делимой. Далее $V = (G \cap F)_p^- \oplus R$, где $R = V \cap (M \oplus B)$. Так как $G_p^- = (G \cap F)_p^- \oplus R_p^-$, то G_p^- служит прямым слагаемым в A, если R_p^- — прямое слагаемое в $M \oplus B$. По лемме 1.3, п. 2) $(G_p^-)_p = ((G \cap F)_p)^\wedge_{F_p}$. Так как $G_p = (G \cap F)_p$ и $(G_p)_p^- \subseteq (G \cap F)_p^-$, то, значит, R — подгруппа без кручения. Ввиду леммы 1.3, пп. 3), 5) $R \cap M = 0$. Пусть π — проекция $M \oplus B$ на B. Тогда $\pi R \in S_p(B)$. Действительно, если $x = a + pb \in R$, $a \in M, b \in B$, то $a = y + pz$ для некоторого $y \in M_p$ и $z \in M$. Откуда $p^m x = p^{m+1}(z + b)$, где $p^m = o(y)$. Поскольку $R \in S_p(A)$ и без кручения, то $x = pc$ для некоторого $c \in R$ и $\pi c = b$.

Пусть $r_p(B) < \infty$, и пусть $g = x + y \in R \setminus pR$, $x \in M, y \in B$. По доказанному выше $h_p(y) = 0$. Имеем $B = \langle y \rangle_p^- \oplus B_1$. Если $o(x) = \infty$, то из условия вытекает, что существует гомоморфизм $f : \langle y \rangle_p^- \to$

$\langle x\rangle_p^-$ со свойством $fy = x$. Откуда следует, что $M \oplus \langle y\rangle_p^- = M \oplus \langle g\rangle_p^-$. Аналогичное равенство справедливо, если $o(x) < \infty$. Получаем $R_p^- = \langle g\rangle_p^- \oplus (M \oplus B_1) \cap R_p^-$, где $B = \langle y\rangle_p^- \oplus B_1$ и $r_p(B_1) = r_p(B) - 1$. По индукции R_p^- — прямое слагаемое. Заметим, что $\langle y\rangle_p^- = \langle y\rangle_*^\wedge$. Действительно, если бы в $\langle y\rangle_p^-$ существовала собственная замкнутая сервантная подгруппа, то она выделялась бы прямым слагаемым, а тогда дополнительное прямое слагаемое было бы p-делимым, что противоречит p-редуцированности B. Следовательно, $\langle y\rangle_p^- \cong \langle g\rangle_p^- = \langle g\rangle_*^\wedge$. Поэтому если $G \in S(A)$, то $\langle g\rangle_p^- \subseteq R^\wedge$. Опять получаем, что $R^\wedge$ и, значит, $G^\wedge$ — прямое слагаемое.

Если $r_p(B) = \infty$, то по следствию 3.2 B, как и F, q-делима для каждого простого $q \neq p$. В этом случае Z-адическая топология совпадает с p-адической, а p-сервантность с сервантностью. Поэтому осталось установить справедливость предложения для p-сервантных подгрупп и p-адической топологии. Если F — p-адическая алгебраически компактная группа, то в обозначениях, приведенных выше, M, как прямое слагаемое, также p-адическая алгебраически компактная группа, она полна в своей p-адической топологии. Поэтому $(\pi R)^\wedge$ совпадает с $\pi(R^\wedge)$. Следовательно, $B = \pi(R^\wedge) \oplus B_1$, $M \oplus \pi(R^\wedge) = M \oplus R^\wedge$ и $M \oplus B = R^\wedge \oplus (M \oplus B_1)$.

Если же $p^n F = 0$, то любая сервантная подгруппа группы F выделяется в ней прямым слагаемым [2, теорема 27.5]. Поэтому $F = (G \cap F) \oplus M$ и $G = (G \cap F) \oplus R$, где $R = (M \oplus B) \cap G$. Поскольку $p^n A = p^n B \cong B$, а $p^n(R^\wedge)$ совпадает с замыканием сервантной подгруппы $p^n R$ в $p^n B$, то $p^n B = p^n(R^\wedge) \oplus K$. Покажем, что $X \oplus Y = B$, где $X = \langle p^n(R^\wedge)\rangle_*^B$, $Y = \langle K\rangle_*^B$. Пусть $px = g + b$, $g \in X, b \in Y$. Тогда $p^n x = p^{n-1}g + p^{n-1}b$. Откуда $p^{n-1}g \in p^n(R^\wedge)$. Следовательно, $p^{n-1}g = p^n g_1$, $g_1 \in R^\wedge$. Так как X — группа без кручения, то $g = pg_1$. Получаем $p^{n-1}b = p^n(x - g_1)$.

Поэтому $a = x - g_1 \in Y$ и, значит, $x = g_1 + a \in X \oplus Y$. Это и существенность $X \oplus Y$ влечет совпадение ее с B. Поскольку $p^n(R^\wedge) = p^n X$, то $M \oplus X = M \oplus R^\wedge$. Откуда $M \oplus B = M \oplus X \oplus Y = M \oplus R^\wedge \oplus Y$.

Теорема 3.5. *Редуцированная смешанная группа A является cs-группой тогда и только тогда, когда A представима в виде $S = \oplus_{i\in I} A_i \subseteq A \subseteq \prod_{i\in I} A_i = \overline{S}$, где $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, а каждая A_i — cs-группа, однозначно определяемая группой A, со свойством $p_i^\omega A_i = 0$ для некоторого простого p_i, являющаяся либо p_i-группой, либо группой без кручения, либо смешанной группой из предложения 3.3 или 3.4. Причем A — такая сервантная подгруппа в $\overline{S}$, что $E(A) \subseteq E(\overline{S})$ и $E(A)$ содержит хотя бы один представитель из каждого класса эквивалентных идемпотентов кольца $E(\overline{S})$.*

Доказательство. Необходимость. Для каждого $p \in \Pi(A)$ получаем $A = R_{(p)} \oplus D_{(p)}$, где $D_{(p)} = 0_p^- = p^\omega A$, $p^\omega R_{(p)} = 0$ (индекс p взят в скобки, чтобы отличить от p-компоненты). Пусть множество $\Pi(A) = \{p_1 < p_2 < \ldots\}$ упорядочено по возрастанию. Имеем $D_{(p_1)} = D_{(p_2)} \oplus R_{(p_2)}$, $A = D_{(p_n)} \oplus R_{(p_n)} \oplus \ldots \oplus R_{(p_1)}$, $R_{(p_{n+1})} \cong D_{(p_n)}/p_{n+1}^\omega D_{(p_n)}$. Поэтому $\oplus_{p\in\Pi} R_{(p)} \subseteq A$, где $\Pi \subseteq \Pi(A)$. Каждая p-компонента $A_p \subseteq R_{(p)}$. Следовательно, $R_{(p)} = (A_p)^\wedge \oplus G_{(p)}$, где $(A_p)^\wedge$ — cs-группа из предложения 3.3, $G_{(p)}$ — cs-группа без кручения. Имеем $q(A_p)^\wedge = (A_p)^\wedge$ для всех простых $q \neq p$, а $G_{(p_n)}$ является p_m-делимой при $p_m < p_n$, поэтому по следствию 3.2 $\Pi(G_{(p_n)}) \cap \Pi(G_{(p_m)}) = \varnothing$ при $n \neq m$. Следовательно, $\Pi(R_{(p)}) \cap \Pi(R_{(q)}) = \varnothing$ при $p \neq q$. Факторгруппа $A/(\oplus_{i=1}^n R_{(p_i)})$ является p_m-делимой для всех $m < n$. Значит, $A/(\oplus_{p\in\Pi} R_{(p)})$ — делимая группа. Положим $A_i = R_{(p_i)}$. Если теперь $f \in E(A)$, то $f|S \in E(S)$ и этот эндоморфизм продолжается до единственного (в силу плотности S в $\overline{S}$) эндоморфизма $\overline{f} \in E(\overline{S})$ такого, что $\overline{f}\,|A = f$. Поэтому можно отождествить $E(A)$ с подкольцом в $E(\overline{S}) = E(S)$. Если $\overline{S} = B \oplus G$, то, т.к. S вполне характеристична в $\overline{S}$, получим $S = (B \cap S) \oplus (G \cap S)$. Имеем $B \cap S \subseteq B \cap A$ и $A = (B \cap A) \oplus N$ для некоторого дополнительного прямого слагаемого N. Если π — проекция группы A на $B \cap A$, то $\overline{S} = \overline{\pi}\overline{S} \oplus (1 - \overline{\pi})\overline{S}$, где $\overline{\pi}\overline{S} = B$ в силу плотности $B \cap A$ в B.

Достаточность с учетом леммы 1.1 доказывается так же, как в предложении 3.3.

Литература

[1] Мишина А.П. Абелевы группы // Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 17. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). - М.: 1979. - С. 3-63.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. - М.: Мир. - Т.1. - 1974. - 335 с.; Т.2. - 1977. - 416 с.

[3] Чехлов А.Р. О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули, Томск, 1984. С. 137-152.

[4] Чехлов А.Р. Абелевы CS-группы без кручения // Абелевы группы и модули, Томск, 1988. С. 131-147.

[5] Чехлов А.Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. вузов. Математика. 1990. т 3. С. 84-87.

[6] Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули, Томск, 1991. С. 157-178.

[7] Беккер И.Х., Крылов П.А., Чехлов А.Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули, Томск, 1994. С. 3-52.