УДК 512.541+512.553.3

ПРОЕКТИВНЫЕ И ОБРАЗУЮЩИЕ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦОМ ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А.В. Царев

Ключевые слова: кольцо псевдорациональных чисел, псевдорациональный ранг, проективный модуль, образующий модуль.

Аннотация

В работе описаны проективные, плоские и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел, причем для проективных модулей построена полная и независимая система инвариантов.

Кольцо псевдорациональных чисел ввели независимо друг от друга А.А. Фомин [3] и П.А. Крылов [5]. В [4] А.А. Фомин использовал конечно порожденные модули над этим кольцом для построения двойственности между категориями абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых смешанных групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. П.А. Крылов использовал модули над кольцом псевдорациональных чисел для изучения модульной структуры абелевых sp-групп над их кольцами эндоморфизмов (см. например [6]).

Оба автора исследовали некоторые свойства кольца псевдорациональных чисел и модулей над ним. Так, например, и в [3] и в [5] дано описание идеалов кольца псевдорациональных чисел. Кроме того, П.А. Крыловым с соавторами доказана наследственность данного кольца, а А.А. Фоминым введен важный инвариант — псевдорациональный ранг. Отметим также, что С.В. Чегляковой в [7] описаны инъективные модули над этим кольцом. О связи модулей над кольцом псевдорациональных чисел с факторно делимыми смешанными группами и группами без кручения конечного ранга см. также [9].

Под «группой» в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под «кольцом» — коммутативное кольцо, под «модулем» — двусторонний модуль над коммутативным кольцом; Z, Q и $\widehat{Z}_p$ — обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно или их аддитивных групп, $Z(m)$ — кольцо (аддитивная группа) классов вычетов по модулю m, P — множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Если S — подмножество K-модуля M, то через $\langle S\rangle$ и $\langle S\rangle_K$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S, а через $\langle S\rangle_*$ — сервантную оболочку множества S, состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S\rangle$ при некотором натуральном n. Через $r^*(M)$ будем обозначать псевдорациональный ранг R-модуля M, а через tM — его периодический подмодуль.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [1] и [2].

1. Идеалы кольца R.

Определение 1. *Пусть* $\chi = (m_p)$ — *произвольная характеристика и* $K_p = Z(p^{m_p})$ *или* $K_p = \widehat{Z}_p$, *соответственно при* $m_p < \infty$ *и* $m_p = \infty$. *Если* χ *содержит бесконечно много ненулевых p-компонент, то рассмотрим подкольцо* R_χ *кольца* $\prod_{p\in P} K_p$, *сервантно порожденное идеалом* $\bigoplus_{p\in P} K_p$ *и единицей кольца:*

$$R_\chi = \big\langle 1, \bigoplus_{p\in P} K_p \big\rangle_*.$$

Если все p-компоненты характеристики χ, *за исключением* $p_1, \ldots, p_n$, *равны нулю, то определим* $R_\chi = Q \oplus K_{p_1} \oplus \ldots \oplus K_{p_n}$. *Если* $\chi = (\infty, \infty, \ldots)$ — *характеристика группы рациональных чисел, то кольцо* R_χ *будем называть кольцом псевдорациональных чисел и обозначать просто* R.

Для характеристики χ, все p-компоненты которой, за исключением $p_1, \ldots, p_n$, равны нулю, определим еще кольцо $K_\chi = K_{p_1} \oplus \ldots \oplus K_{p_n}$.

Свойства колец R_χ.

1. Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то элемент $r = (\alpha_p) \in \prod_{p\in P} K_p$ принадлежит кольцу R_χ тогда и только тогда, когда существует такое рациональное число $|r| = \frac{m}{n}$, что $n\alpha_p = m$ почти при всех простых p.

2. Элемент, все p-компоненты которого, включая и рациональную (если такая есть), равны 1 (0), принадлежит R_χ и является единицей (нулем) кольца R_χ.

3. Обозначим через ε_p элемент кольца R_χ такой, что его p-компонента равна 1, а все остальные компоненты (включая и рациональную, если такая содержится) равны 0. Тогда ε_p — идемпотент, а множество $\varepsilon_p R_\chi$ является идеалом кольца R_χ и выделяется прямым слагаемым.

4. Элементы вида

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \ldots + \varepsilon_{p_n}, \tag{a}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа, и элементы вида

$$1 - \varepsilon, \tag{b}$$

а также 1 и 0, составляют множество всех идемпотентов кольца R_χ.

5. Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то для элемента $r \in R_\chi$ обозначим через $|r|$ рациональное число, определенное в свойстве 1, а если характеристика χ почти нулевая, то через $|r|$ обозначим рациональную компоненту элемента r. Тогда число $|r|$ определено однозначно и

$$|r_1 \pm r_2| = |r_1| \pm |r_2|, \quad |r_1 \cdot r_2| = |r_1| \cdot |r_2|,$$

для любых $r_1, r_2 \in R_\chi$.

6. Любой элемент $r \in R_\chi$ можно представить в виде $r = \varepsilon r + (1-\varepsilon)|r|$, где ε — идемпотент вида (a).

7. Множество $T_\chi = \bigoplus_{p\in P} K_p$ является максимальным идеалом кольца R_χ, причем $R_\chi / T_\chi \cong Q$. Если $\chi = (\infty)$, то идеал T_χ будем обозначать T.

8. Если идеал кольца R_χ содержит такой элемент r, что $|r| \neq 0$, то он содержит идемпотент вида (b).

Рассмотрим кольцо R_χ, построенное на характеристике $\chi = (m_p)$. Пусть J — произвольный идеал кольца R_χ, $T_J = T_\chi \cap J$ — множество всех таких $r \in J$, что $|r| = 0$. Возможны два случая:

1-й случай. $T_J = J$. Пусть $\varepsilon_p J = J_p$. Рассмотрим отображения $\pi_i \colon J \to J_{p_i}$ по закону $\pi_i(r) = \varepsilon_{p_i} r$. Для них, очевидно, выполняются условия:

$$(a) \qquad \pi_i \pi_j = \begin{cases} 0, & \text{при } \ i \neq j \\ \pi_i, & \text{при } \ i = j, \end{cases}$$

(b) для любого $r \in J$

$$r = \varepsilon r = \varepsilon_{p_1} r + \ldots + \varepsilon_{p_n} r = \pi_1(r) + \ldots + \pi_n(r).$$

Тогда эти отображения задают прямое разложение

$$J = \bigoplus_{p \in P} J_p. \tag{1}$$

Так как $J_p = \varepsilon_p J$ — идеал кольца $\varepsilon_p R_\chi = K_p$, то

$$J_p = 0 \ \text{ или } \ J_p = p^{s_p} K_p, \ \ s_p < m_p. \tag{2}$$

Таким образом из (1) и (2) следует, что

$$J = \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p \cong T_\varphi,$$

где $P_1 = \{\, p \in P \mid J_p \neq 0 \,\}$, а характеристика $\varphi = (k_p)$ такая, что $k_p = m_p - s_p$, при $p \in P_1$ и $k_p = 0$, при $p \notin P_1$.

2-й случай. В J существует такой элемент r, что $|r| = \frac{m}{n} \neq 0$. Тогда для элемента $s \in R_\chi$, такого что $|s| = \frac{n}{m}$, справедливо $sr = t \in J$, причем $|t| = 1$. Так как $ut \in J$ для любого $u \in R_\chi$, то в идеале J есть элементы из каждого класса смежности множества R_χ / T_χ.

Очевидно, что для r, $s \in J$ равенство $|r| = |s|$ выполняется тогда и только тогда, когда $r - s \in T_J$. Значит, идеал J состоит из подклассов $r + T_J$, взятых по одному из каждого класса $r + T_\chi$.

Так как любой класс, содержащийся в J, можно записать в виде $rt + T_J$, где $r \in R_\chi$, $t \in J$ и $|t| = 1$, то идеал J однозначно определяется классами T_J и $t + T_J$.

Убедимся, что идеал J однозначно определяется одним множеством T_J. Пусть J_1 — произвольный идеал кольца R_χ, не содержащийся в T_χ, такой что $T_{J_1} = T_J$. Возьмем такие элементы $t_1 \in J_1$ и $t \in J$, что $|t_1| = |t| = 1$. Тогда $t_1 t \in J$ и $t_1 t \in J_1$. Так как $|t_1 t| = 1$, то

$$t_1 t + T_J = t_1 + T_J = t + T_J,$$

следовательно, идеалы J и J_1 совпадают, так как определяются одними и теми же классами T_J и $t + T_J$.

Так как $J \not\subset T_\chi$, то идеал J содержит такой элемент r, что $|r| \neq 0$, следовательно, в J содержится идемпотент $1 - \varepsilon$ вида (b). Тогда

$$T_J = (1 - \varepsilon) T_\chi \oplus p_1^{k_1} K_{p_1} \oplus \ldots \oplus p_n^{k_n} K_{p_n},$$

где $\varepsilon_{p_i}(1-\varepsilon)=0$ для любого $i\in\{1,\,\ldots,\,n\}$. Учитывая, что J однозначно определяется множеством T_J, получаем

$$J=(1-\varepsilon)R_\chi\oplus p_1^{k_1}K_{p_1}\oplus\ldots\oplus p_n^{k_n}K_{p_n}.$$

Таким образом, получили теорему.

Теорема 1. *Множества следующего вида, и только они, являются идеалами кольца R_χ:*

1. $\bigoplus_{p\in P_1}p^{s_p}K_p$, *где* $P_1\subseteq P$,
2. $(1-\varepsilon_{p_1}-\ldots-\varepsilon_{p_n})R_\chi\oplus\bigoplus_{p\in P_1}p^{s_p}K_p$, *где* $P_1\subseteq\{p_1,\,\ldots,\,p_n\}$.

Следствие 1. *Любой конечно порожденный идеал кольца R_χ главный.*

2. Проективные и плоские R-модули.

Определение 2. *Модуль M называется проективным, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

1) *каждый эпиморфизм $\xi:B\to M$ расщепляется, т. е. $B=\ker\xi\oplus A$;*

2) *для любого эпиморфизма $\alpha:A\to B$ и любого гомоморфизма $\varphi:M\to B$ существует такой гомоморфизм $\psi:M\to A$, что $\varphi=\alpha\psi$;*

3) *модуль M изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.*

Напомним, что кольцо K называется *наследственным*, если любой его идеал является проективным модулем над K.

Теорема 2. *Кольцо R_χ является наследственным тогда и только тогда, когда характеристика χ содержит только символы 0, 1 и ∞. В частности, кольцо псевдорациональных чисел наследственно.*

Доказательство. Пусть характеристика $\chi=(m_p)$ удовлетворяет условиям теоремы. Идеалы вида $(1-\varepsilon)R_\chi$ всегда проективны над кольцом R_χ, так как выделяются прямыми слагаемыми в R_χ. Идеалы вида $p^{k_p}K_p$, $0<k_p<m_p$ либо нулевые при $m_p=0$, либо равны Z/pZ при $m_p=1$ и $k_p=0$, либо изоморфны $\widehat{Z}_p$ при $m_p=\infty$, следовательно, они также проективны. Учитывая, что каждый идеал кольца R_χ является прямой суммой выше рассмотренных идеалов, получаем, что любой идеал кольца R_χ проективен.

Если характеристика χ содержит элемент m_p, такой что $1<m_p<\infty$, то кольцо R_χ содержит идеал pK_p, который, очевидно, не проективен.

Учитывая, что проективные модули над наследственными кольцами изоморфны прямым суммам идеалов, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Модуль M проективен над кольцом псевдорациональных чисел тогда и только тогда, когда*

$$M\cong\bigoplus_{i\in I}(1-\varepsilon_i)R\oplus\bigoplus_{p\in P}\bigoplus_{\mathfrak{m}_p}\widehat{Z}_p.$$

При доказательстве следующей теоремы используется тот факт, что любой подмодуль проективного модуля над наследственным кольцом проективен.

Теорема 3. *Пусть M_1 и M_2 — произвольные проективные R-модули, тогда, если $TM_1 \cong TM_2$ и $M_1/TM_1 \cong M_2/TM_2$, то $M_1 \cong M_2$.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & TM_1 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\beta_1} & M_1/TM_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \varphi\big\downarrow\big\uparrow\psi & & \big\downarrow\delta & & \\ 0 & \longrightarrow & TM_2 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow{\beta_2} & M_2/TM_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Здесь δ — изоморфизм, а гомоморфизмы φ и ψ существует в силу проективности модулей M_1, M_2 и определяются равенствами:

$$\beta_2\varphi = \delta\beta_1, \quad \beta_1\psi = \delta^{-1}\beta_2. \tag{1}$$

Из (1) следует, что $\beta_1 = \delta^{-1}\beta_2\varphi$ и $\beta_2 = \delta\beta_1\psi$, откуда

$$\beta_2 = \delta(\delta^{-1}\beta_2\varphi)\psi = \beta_2\varphi\psi \;\Rightarrow\; \beta_2(1_{M_2} - \varphi\psi) = 0,$$

$$\beta_1 = \delta^{-1}(\delta\beta_1\psi)\varphi = \beta_1\psi\varphi \;\Rightarrow\; \beta_1(1_{M_1} - \psi\varphi) = 0.$$

Тогда для любых $a \in M_1$, $b \in M_2$

$$\psi\varphi(a) = a + t_1 \;\text{ и }\; \varphi\psi(b) = b + t_2 \qquad (t_1 \in TM_1,\, t_2 \in TM_2). \tag{2}$$

Рассмотрим отображение $\omega = 1_{M_2} - \varphi\psi$. Согласно (2) ω есть гомоморфизм между R-модулями M_2 и TM_2. По основной теореме о гомоморфизме

$$\omega(M_2) \cong M_2/\ker\omega. \tag{3}$$

Так как $\omega(M_2) \subseteq TM_2$ и TM_2 — проективный R-модуль, то $\omega(M_2)$ также проективный R-модуль. А тогда из (3) и проективности $\omega(M_2)$, следует равенство

$$M_2 = \omega(M_2) \oplus \ker\omega, \quad \omega(M_2) \subseteq TM_2.$$

Обозначим $\omega(M_2) = T_2$, $\ker\omega = S_2$, тогда $M_2 = T_2 \oplus S_2$. Заметим, что $b \in \ker\omega$ тогда и только тогда, когда $\varphi\psi(b) = b$, следовательно,

$$S_2 = \{\, b \in M_2 \mid \varphi\psi(b) = b \,\}. \tag{4}$$

Аналогично доказывается, что $M_1 = T_1 \oplus S_1$, где

$$S_1 = \{\, a \in M_1 \mid \psi\varphi(a) = a \,\}. \tag{5}$$

Если $a \in S_1$, то согласно (5) верно, что $\psi\varphi(a) = a$. Так как $\varphi\psi(\varphi(a)) = \varphi(a)$, то $\varphi(a) \in S_2$, и значит,

$$a = \psi(\varphi(a)) \in \psi(S_2),$$

следовательно, $S_1 \subseteq \psi(S_2)$. А если $c \in \psi(S_2)$, то $c = \psi(b)$, где $b \in S_2$. Тогда $\varphi(c) = \varphi\psi(b) = b$, откуда $\psi\varphi(c) = \psi(b) = c$, т. е. $c \in S_1$ и $\psi(S_2) \subseteq S_1$. Таким образом,

$$\psi(S_2) = S_1. \tag{6}$$

Из (5) следует, что R-модули S_2 и $\psi(S_2)$ изоморфны, значит, в соответствии с равенством (6), изоморфны R-модули S_1 и S_2.

Так как $M_2 = S_2 \oplus T_2$, где $T_2 = \omega(M_2) \subseteq TM_2$, то $TM_2 = TS_2 \oplus T_2$. Аналогично, $TM_1 = TS_1 \oplus T_1$. Учитывая, что $S_1 \cong S_2$ и TM_1, TM_2 — прямые суммы проективных (свободных) $\widehat{Z}_p$-модулей (по различным простым p), получаем, что $T_1 \cong T_2$. Таким образом, R-модули M_1 и M_2 изоморфны. Теорема доказана.

Пусть M — произвольный проективный R-модуль. Рассмотрим его подмодуль TM. Он также проективен, более того $TM = \bigoplus_{p\in P} M_p$, где M_p — свободный $\widehat{Z}_p$-модуль. Каждое слагаемое M_p с точностью до изоморфизма задается кардинальным числом $\mathfrak{r}_p$, равным мощности множества прямых слагаемых вида $\widehat{Z}_p$ в его свободном разложении. Далее, фактормодуль M/TM является векторным пространством над полем рациональных чисел, следовательно, задается величиной $\dim_Q M/TM$, называемой *псевдорациональным рангом* R-модуля M (далее его будем обозначать $r^*(M)$).

Из всего выше сказанного и теоремы 3 следует, что *псевдорациональный ранг и множество кардинальных чисел* $\{\mathfrak{r}_p\}_{p\in P}$ *составляют полную и независимую систему инвариантов проективного* R*-модуля* M.

Определение 3. K*-модуль* M *называется плоским, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:*

1) *каждый мономорфизм* $\alpha : A \to B$ *индуцирует мономорфизм*

$$\alpha \otimes 1_M : A \otimes_K M \to B \otimes_K M;$$

2) *для любого конечно порожденного идеала* I *кольца* K *канонический эпиморфизм* $\beta : I \otimes_K M \to IM$ *по закону* $\beta(i \otimes m) = im$ *является изоморфизмом;*

3) *модуль* M *является прямым пределом проективных* K*-модулей.*

Из теоремы 1 следует, что конечно порожденные идеалы кольца псевдорациональных чисел имеют вид:

$$I_1 = \bigoplus_{p\in P_1} p^{s_p}\widehat{Z}_p \quad \text{или} \quad I_2 = (1-\varepsilon)R \oplus \bigoplus_{p\in P_1} p^{s_p}\widehat{Z}_p = (1-\varepsilon)R \oplus I_1,$$

где P_1 — произвольное конечное множество простых чисел и $(1-\varepsilon)I_1 = 0$. Тогда

$$I_1 \otimes_R M \cong \bigoplus_{p\in P_1} \bigl[p^{s_p}\widehat{Z}_p \otimes_R M\bigr] \quad \text{и} \quad I_2 \otimes_R M \cong \bigl[(1-\varepsilon)R \otimes_R M\bigr] \oplus \bigl[I_1 \otimes_R M\bigr].$$

Так как модуль $(1-\varepsilon)R \otimes_R M$ канонически изоморфен модулю $(1-\varepsilon)M$, то из прямого разложения модуля $I_1 \otimes_R M$ и условия 2) определения плоского модуля следует, что M *является плоским* R*-модулем тогда и только тогда, когда* $M_p = \varepsilon_p M$ — *плоский* $\widehat{Z}_p$*-модуль при любом простом* p.

Так как $\widehat{Z}_p$ — коммутативная наследственная область целостности, то p-адический модуль M_p является плоским в том и только том случае, когда M_p есть модуль без кручения, что равносильно тому, что в M_p нет элементов порядка p.

Таким образом, из всего выше сказанного следует

Теорема 4. *Модуль над кольцом псевдорациональных чисел является плоским тогда и только тогда, когда в нем нет элементов конечного порядка отличных от нуля.*

Вернемся к вопросу о проективности, для случая конечно порожденных R-модулей. Для начала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Если L — подмодуль R-модуля M, то $r^*(M) = r^*(M/L) + r^*(L)$.*

Доказательство. Так как $T\big(M/L\big) = TM/TL$, то

$$\big(M/L\big)/T\big(M/L\big) = \big(M/L\big)/\big(TM/TL\big) \cong \big(M/TM\big)/\big(L/TL\big).$$

Следовательно, $r^*(M) = r^*(M/L) + r^*(L)$.

Далее, пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольная система элементов R-модуля M. Рассмотрим множество

$$\Delta M_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0\},$$

которое, очевидно, является R-модулем. Если X — система образующих в M, то ΔM_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* R-модуля M.

Лемма 2. *Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — система образующих R-модуля M, то*

$$n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : R^n \to M$, по закону

$$\varphi(r_1, \ldots, r_n) = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n.$$

Не трудно убедится, что φ — эпиморфизм. Заметим, что

$$(r_1, \ldots, r_n) \in \ker\varphi \Leftrightarrow r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0,$$

т.е. $\ker\varphi = \Delta M_X$, следовательно, $M \cong R^n/\Delta M_X$ и $n = r^*(M) + r^*(\Delta M_X)$.

Теорема 5. *Конечно порожденный R-модуль раскладывается в прямую сумму проективного и конечного модуля тогда и только тогда, когда у него есть конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений.*

Доказательство. Пусть конечно порожденный R-модуль M раскладывается в прямую сумму проективного и конечного модуля. Тогда

$$M \cong (1-\varepsilon_1)R \oplus \ldots \oplus (1-\varepsilon_n)R \oplus K_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus K_{\chi_m}. \tag{1}$$

Рассмотрим множество X, в которое входит по одному образующему элементу из каждого слагаемого разложения (1). Не трудно видеть, что тогда

$$\Delta M_X \cong \varepsilon_1 R \oplus \ldots \oplus \varepsilon_n R \oplus (1-\varepsilon_{n+1})R \oplus \ldots \oplus (1-\varepsilon_{n+m})R,$$

т. е. M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений.

Обратно, пусть M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений ΔM_X, построенный на множестве образующих $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Рассмотрим множество

$$\Delta^* M_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \ldots + r_nx_n \in tM\},$$

где tM — подмодуль R-модуля M, состоящий из всех элементов конечного порядка. Очевидно, $\Delta^* M_X$ является модулем псевдорациональных отношений R-модуля M/tM, построенным на множестве образующих $\overline{X} = \{x_1 + tM, \ldots, x_n + tM\}$.

Так как $tM \subseteq TM$, то $r^*(tM) = 0$, следовательно, $r^*(M/tM) = r^*(M)$. По лемме 2 отсюда получаем, что $r^*(\Delta^* M_X) = r^*(\Delta M_X)$.

Поскольку кольцо R наследственное, то из $\Delta^* M_X \subseteq R^n$ и $\Delta M_X \subseteq R^n$ получаем, что R-модули $\Delta^* M_X$ и ΔM_X проективные. Тогда, учитывая, что $r^*(\Delta^* M_X) = r^*(\Delta M_X)$, имеют место разложения

$$\Delta^* M_X = P_1 \oplus S_1 \quad \text{и} \quad \Delta M_X = P_2 \oplus S_2,$$

где $P_1 \cong P_2 \cong (1-\varepsilon)R^k$, а модули S_1 и S_2 имеют псевдорациональный ранг 0, причем S_2 — конечно порожден.

Предположим, что R-модуль $\Delta^* M_X$ не является конечно порожденным. Тогда S_1 содержит подмодуль L вида $\bigoplus_{p \in P_1} \widehat{Z}_p$, где P_1 — бесконечное множество простых чисел. Пусть $\{\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \mid i \in N\}$ — независимое над R множество порождающих модуля L. Так как

$$\alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n \in tM \;\Leftrightarrow\; m_i\alpha_{i1}x_1 + \ldots + m_i\alpha_{in}x_n = 0,$$

при некотором натуральном m_i, то S_1 также содержит подмодуль вида $\bigoplus_{p \in P_1} \widehat{Z}_p$, порожденный множеством $\{m_i\alpha_i \mid i \in N\}$. Но последнее невозможно, поскольку S_1 — конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 0. Из полученного противоречия следует, что $\Delta^* M_X$ — конечно порожденный R-модуль.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta^* M_X \longrightarrow R^n \longrightarrow M/tM \to 0.$$

Так как $\Delta^* M_X$ конечно порожден, то M/tM конечно представим. Очевидно, также, что M/tM — плоский R-модуль. А любой плоский конечно представимый модуль является проективным (см. например [2]).

Отображение $\varphi : \Delta^* M_X \to tM$, по закону $\varphi(r_1, \ldots, r_n) = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$, очевидно, является эпиморфизмом. Так как $\ker\varphi = \Delta M_X$, то $tM \cong \Delta^* M_X / \Delta M_X$. R-модуль $\Delta^* M_X$ является конечно порожденным, следовательно, tM также конечно порожден. Тогда $tM = \varepsilon_{p_1} tM \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{p_s} tM$, где $\varepsilon_{p_i} tM$ — конечно порожденные периодические $\widehat{Z}_p$-модули, которые конечны. Следовательно, R-модуль tM является конечным.

Из проективности R-модуля M/tM следует, что $M \cong M/tM \oplus tM$. Таким образом, обратное утверждение и теорема доказаны.

Лемма 3. *Пусть L — подмодуль конечно порожденного R-модуля M, для которого $r^*(L) = r^*(M)$, тогда L конечно порожден.*

Доказательство. Пусть $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_R$, $L \subseteq M$ и $r^*(M) = r^*(L) = k$. И пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — наибольшее подмножество из L независимое по модулю TL, т. е. Y содержит по одному элементу из каждого классах эквивалентности по модулю TL кроме нулевого. Так как $r^*(L) = r^*(M)$, то Y будет наибольшим независимым по модулю TM множеством в M. Тогда

$$x_i = r_{i1}y_1 + \ldots + r_{ik}y_k + t_i, \text{ где } r_{ij} \in R, \ t_i \in TM$$

и $M = \langle y_1, \ldots, y_k, t_1, \ldots, t_n \rangle_R$. Так как $t_1, \ldots, t_n \in TM$, то найдется такой идемпотент $\varepsilon \in R$, что $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle_R \subseteq \varepsilon TM$. Рассмотрим следующие разложения

$$M = (1-\varepsilon)\langle y_1, \ldots, y_k \rangle_R \oplus \varepsilon M \text{ и } L = (1-\varepsilon)L \oplus \varepsilon L.$$

Отсюда $(1-\varepsilon)L = (1-\varepsilon)\langle y_1, \ldots, y_k \rangle_R$ — конечно порожденный R-модуль и $\varepsilon L \subseteq \varepsilon M$.

Так как M — конечно порожденный R-модуль, то $\varepsilon_p M$ — тоже конечно порожденный R-модуль, причем структура R-модуля на $\varepsilon_p M$ совпадает со структурой $\widehat{Z}_p$-модуля. Модуль $\varepsilon_p L$ содержится в конечно порожденном $\widehat{Z}_p$-модуле $\varepsilon_p M$, следовательно, $\varepsilon_p L$ конечно порожден. А так как εL раскладывается в прямую сумму модулей вида $\varepsilon_p L$, где p пробегает некоторое конечное множество, то εL тоже конечно порожден.

Таким образом R-модуль L конечно порожденный, как прямая сумма конечно порожденных модулей $(1-\varepsilon)L$ и εL.

Предложение 1. *Если у конечно порожденного R-модуля существует конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений, то все его модули псевдорациональных отношений конечно порождены.*

Доказательство. Рассмотрим R-модуль M, удовлетворяющий условиям предложения. Пусть ΔM_X — его произвольный модуль псевдорациональных отношений, построенный на системе $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Как и в доказательстве теоремы 5 построим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Delta^* M_X \longrightarrow R^n \longrightarrow M/tM \to 0. \qquad (1)$$

Так как M имеет конечно порожденный модуль псевдорациональных отношений, то по теореме 5 R-модуль M/tM проективный. Следовательно, последовательность (1) расщепляется, т. е. $R^n \cong \Delta^* M_X \oplus M/tM$. Здесь R^n и M/tM — конечно порожденные R-модули, значит, $\Delta^* M_X$ — тоже конечно порожденный R-модуль.

Учитывая, что $\Delta M_X \subseteq \Delta^* M_X$ и $r^*(\Delta M_X) = r^*(\Delta^* M_X)$, по лемме 3 получаем, что ΔM_X — конечно порожденный R-модуль.

Следствие 3. *Конечно порожденный R-модуль является конечно представленным тогда и только тогда, когда он раскладывается в прямую сумму проективного и конечного R-модулей.*

Следствие 4. *Плоский конечно порожденный модуль над кольцом псевдорациональных чисел является проективным тогда и только тогда, когда он конечно представленный.*

Справедливость данных утверждений непосредственно вытекает из теоремы 5.

3. Образующие R-модули.

Пусть M и L — произвольные K-модули. Для них рассмотрим подмодули

$$S_L(M) = \sum_{\varphi: M \to L} \varphi(M) \quad \text{и} \quad K_M(L) = \bigcap_{\varphi: M \to L} \ker \varphi.$$

Модуль $S_L(M)$ называет *следом* модуля M в модуле L, а фактормодуль $M/K_M(L)$ называется *коследом* модуля L в M.

Определение 4. *Модуль M над кольцом K называется образующим, если его след в кольце K равен K.*

Найдем условия, при которых модуль M над кольцом псевдорациональных чисел является образующим.

Так как $S = S_R(M)$ — идеал кольца R, то из выше сказанного следует, что он однозначно задается множеством $T_S = T \cap S$ и своим псевдорациональным рангом.

Теорема 6. *R-модуль M является образующим тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *M содержит прямые слагаемые вида $\widehat{Z}_p$ при любом простом p;*

2. *$Hom_R(M, R) \neq Hom_R(M, T)$.*

Доказательство. Пусть S — след модуля M в кольце R. Равенство $S = R$ выполняется тогда и только тогда, когда $T_S = T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{Z}_p$ и $r^*(S) = 1$.

Равенство $\varepsilon_p S = \widehat{Z}_p$ равносильно существованию эпиморфизма из M в $\widehat{Z}_p$. Но $\widehat{Z}_p$ — проективный R-модуль, следовательно, последнее условие эквивалентно тому, что M имеет прямое слагаемое изоморфное $\widehat{Z}_p$.

Условие $r^*(S) = 1$ эквивалентно существованию гомоморфизма $\varphi \in Hom_R(M, R)$ такого, что $\varphi(M) \not\subset T$, т. е. равносильно тому, что $Hom_R(M, R) \neq Hom_R(M, T)$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 7. *Модуль M над кольцом псевдорациональных чисел является образующим тогда и только тогда, когда $M \cong R \oplus X$, где X — некоторый R-модуль.*

Доказательство. Пусть M — произвольный образующий R-модуль. Согласно условию 2 теоремы 6 существует такой гомоморфизм φ из M в R, что $\varphi(M) \not\subset T$. Тогда идеал $\varphi(M)$ кольца R содержит идемпотент $(1-\varepsilon)$ вида (b), а значит,

$$\varphi(M) = (1-\varepsilon)R \oplus \varepsilon\varphi(M).$$

Композиция эпиморфизма $\varphi : M \to \varphi(M)$ и проекции $\pi : \varphi(M) \to (1-\varepsilon)R$ есть эпиморфизм из M в $(1-\varepsilon)R$. Но $(1-\varepsilon)R$ является проективным R-модулем, следовательно, M содержит прямое слагаемое вида $(1-\varepsilon)R$, т. е.

$$M \cong (1-\varepsilon)R \oplus X_1.$$

Из условия 1 теоремы 6 следует, что R-модуль M содержит также прямое слагаемое изоморфное модулю εR, а значит, $M \cong R \oplus X$.

Обратное утверждение очевидно.

Из теорем 6 и 7 вытекают довольно интересные следствия.

Следствие 5. *Если M — произвольный модуль над кольцом псевдорациональных чисел, то условие $Hom_R(M, R) \neq Hom_R(M, T)$ равносильно тому, что M содержит прямое слагаемое вида $(1-\varepsilon)R$.*

Следствие 6. *Пусть M — конечно порожденный R-модуль. Если*

$$r^*(M) - r^* Hom(M, R) \leqslant 1,$$

то M раскладывается в прямую сумму циклических R-модулей.

Доказательство. Пусть модуль M удовлетворяет условиям данного утверждения и $r^*(M) = n$, тогда $r^* Hom_R(M, R) \geqslant n-1$, а значит, по следствию 5 имеет место прямое разложение

$$M \cong (1-\varepsilon)R^{n-1} \oplus X,$$

причем X — конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 1.

В [8] доказано, что конечно порожденный R-модуль псевдорационального ранга 1 раскладывается в прямую сумму циклических R-модулей. Учитывая, что $(1-\varepsilon)R$ — также циклический R-модуль, получаем справедливость следствия.

Отметим, что в [8] показано, что если конечно порожденный R-модуль X имеет псевдорациональный ранг 1, то $X \cong R_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \ldots \oplus K_{\chi_n}$. Таким образом, если модуль M удовлетворяет условиям следствия 6, то он имеет вид:

$$M \cong (1-\varepsilon)R^{n-1} \oplus R_{\chi_1} \oplus K_{\chi_2} \oplus \ldots \oplus K_{\chi_n}.$$

Лемма 4. *Если M — конечно порожденный R-модуль, то*

$$Hom_R(M, T) = T \cdot Hom_R(M, R).$$

Доказательство. Так как $T \cdot Hom_R(M, R) \subseteq Hom_R(M, T)$, то достаточно показать, что любой гомоморфизм φ из M в T лежит в $T \cdot Hom_R(M, R)$.

Пусть $\varphi \in Hom_R(M, T)$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — система порождающих R-модуля M. Тогда существует такое $\varepsilon \in R$, что $\varphi(x_i) \subseteq \varepsilon R$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Отсюда следует, что $\varphi(M) \subseteq \varepsilon R$ и $\varphi \in T \cdot Hom_R(M, R)$.

Для произвольного конечно порожденного модуля M над кольцом псевдорациональных чисел найдем строение R-модуля $Hom_R(M, R)$.

Модуль M можно представить в виде $M \cong (1-\varepsilon)R^n \oplus L$, где L не содержит прямых слагаемых вида $(1-\varepsilon)R$ ни для какого идемпотента вида (b). Тогда в силу следствия 5

$$Hom_R(M, R) \cong \Big[\bigoplus_n Hom((1-\varepsilon)R, R)\Big] \oplus Hom_R(L, T). \qquad (1)$$

По следствию 4

$$Hom_R(L,\, T) = T \cdot Hom_R(L,\, R) \cong \bigoplus_{p \in P} Hom(\varepsilon_p L,\, \widehat{Z}_p). \tag{2}$$

Так как L — конечно порожденный R-модуль, то $\varepsilon_p L$ — конечно порожденный $\widehat{Z}_p$-модуль, и следовательно,

$$\varepsilon_p L \cong \bigoplus_{m_p} \widehat{Z}_p \oplus Z(p^{k_{1p}}) \oplus \ldots \oplus Z(p^{k_{sp}}).$$

Отсюда

$$Hom(\varepsilon_p L,\, \widehat{Z}_p) \cong \bigoplus_{m_p} \widehat{Z}_p. \tag{3}$$

Таким образом из (1), (2) и (3) следует, что

$$Hom_R(M,\, R) \cong (1-\varepsilon)R^n \oplus [\bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{m_p} \widehat{Z}_p].$$

Следствие 7. *Если M — конечно порожденный R-модуль, то $Hom_R(M,\, R)$ является проективным R-модулем конечного псевдорационального ранга.*

Если M не конечно порожденный R-модуль, то $Hom_R(M,\, R)$ не обязан являться проективным модулем. Например, если $M = T$, то

$$Hom_R(T,\, R) = Hom_R(T,\, T) \cong \prod_{p \in P} \widehat{Z}_p.$$

Однако, не трудно видеть, что модуль $Hom_R(M,\, R)$ всегда является плоским.

Далее, опишем класс R-модулей с нулевым коследом кольца R.

Теорема 8. *R-модуль M имеет нулевой кослед кольца R тогда и только тогда, когда M не содержит прямых слагаемых вида $\widehat{Z}_p$ ни при каком простом p.*

Доказательство. Пусть M не содержит прямых слагаемых вида $\widehat{Z}_p$. В силу проективности R-модуля $\widehat{Z}_p$ это равносильно тому, что не существует эпиморфизма из M в $\widehat{Z}_p$. Так как любой ненулевой подмодуль в $\widehat{Z}_p$ изоморфен $\widehat{Z}_p$, то любой гомоморфизм из M в $\widehat{Z}_p$ нулевой.

Таким образом, $Hom_R(M,\, T) = 0$, а значит, и $Hom_R(M,\, R) = 0$, т. е. модуль M имеет нулевой кослед кольца R.

Заметим, что в силу результатов А.А. Фомина [3] класс конечно порожденных R-модулей с нулевым коследом кольца R это в точности класс $\mathcal{G}$, который ввели S. Glaz и W. Wickless в [10].

Список литературы

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. М.: Мир. 1974, 1977.

[2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир. 1977.

[3] Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers. Abelian Groups and Modules. Trends in Mathematics. Birkhaeuser Verlag Basel/Switzerland. 1999. P. 87–100.

[4] Fomin A.A. Quotient divisible mixed groups // Cont. Math. 2001. V. 273. P. 117–128.

[5] Крылов П.А., Пахомова Е.Г., Подберезина Е.И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник Томского Университета. 2000. Т. 269. С. 47–51.

[6] Крылов П.А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. №3. С. 793–812.

[7] Чеглякова С.В. Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. Т. 7. №2. С. 627–629.

[8] Царев А.В. Конечно порожденные R-модули. Науч. труды мат. факультета МПГУ. М.: Прометей. 2000. С. 285–289.

[9] Царев А.В. Псевдорациональный ранг абелевой группы // Сиб. матем. журнал. 2005. Т. 46. №1. С. 312–325.

[10] Glaz S. and Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Comm. in Algebra. V. 22. 1994. P. 1161–1176.