Вполне транзитивность абелевых групп

В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, вполне транзитивная группа, вполне транзитивная система групп.

Аннотация

Исследуется свойство вполне транзитивности абелевых групп, их прямых сумм и прямых произведений.

Введение

Одним из интересных свойств абелевых групп является свойство вполне транзитивности (абелева группа A называется вполне транзитивной, если для любых элементов $a, b \in A$, для которых $\mathbb{H}(a) \leqslant \mathbb{H}(b)$, существует эндоморфизм группы A, переводящий a в b). Данное понятие было введено Капланским в книге [17] для редуцированных модулей над полным кольцом дискретного нормирования, а также для абелевых p-групп. Там же им было установлено, что всякая редуцированная сепарабельная p-группа является вполне транзитивной. Далее Капланский ставит вопрос: будет ли любая абелева p-группа вполне транзитивной? Первые отрицательные примеры, связанные с данным вопросом, привел Меджибен [20]. Хилл [14] показал, что тотально проективные p-группы, введенные Нунке [23], вполне транзитивны. Корнер [5] рассматривал следующее понятие. Пусть Φ – подкольцо кольца $\mathrm{E}\,(G)$ и H – Φ-инвариантная подгруппа редуцированной p-группы G, тогда Φ вполне транзитивно на H, если для произвольных элементов $x, y \in H$, таких, что $U_G(x) \leqslant U_G(y)$, существует $\phi \in \Phi$ со свойством $\phi x = y$. Он доказал, что p-группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}\,(G)$ вполне транзитивно на $p^\omega G$. Там же им был приведен пример редуцированной p-группы, которая не является вполне транзитивной.

Пусть λ – предельное порядковое число. Абелева p-группа G называется λ-сепарабельной (ле Борнье [16]), если всякая ее конечная система элементов содержится в некотором прямом слагаемом группы G, являющемся тотально проективной группой длины меньшей λ. Ле Борнье доказал, что всякая λ-сепарабельная группа вполне транзитивна.

Хилл и Меджиббен [15] дали описание IT-групп (они назвали p-группу G IT-группой, если она изоморфна изотипной подгруппе тотально проективной группы), в частности, они доказали, что всякая IT-группа вполне транзитивна.

Крылов [36] по аналогии с вполне транзитивными p-группами рассматривал понятие вполне транзитивности для групп без кручения. Арнольд [1] описал однородные вполне транзитивные группы без кручения конечного ранга. Крылов в работах [37, 40] привел описание вполне транзитивных счетных однородных групп без кручения и вполне транзитивных групп без кручения, у которых p-ранг (то есть ранг группы G/pG) конечен, что обобщило результаты, полученные Добрусиным [34]. Неоднородные вполне транзитивные группы без кручения рассматривались Крыловым в работах [38, 40], а в [39] он построил примеры суперразложимых вполне транзитивных групп. Чехлов [50] получил характеризацию вполне транзитивных групп без кручения, все ненулевые эндоморфизмы которых – мономорфизмы.

Важным подклассом класса вполне транзитивных групп является класс квазисервантно инъективных групп (кратко qpi-групп), то есть таких групп A, что всякий гомоморфизм любой сервантной подгруппы B в A продолжается до эндоморфизма группы A. Изучение qpi-групп заявлено как проблема 17 а) в книге [46]. Редуцированными периодическими qpi-группами являются периодически полные группы, строение которых известно. Описание qpi-групп без кручения получено Чехловым [48, 49]. Смешанные qpi-группы изучались Добрусиным [33].

Впервые случай смешанной вполне транзитивной группы был рассмотрен в работе Мадера [19], где он показал, что редуцированная p-адическая алгебраически компактная группа вполне транзитивна.

Москаленко [44], исследуя группу $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), T)$, показала ее вполне транзитивность в случае, когда T – прямая сумма циклических p-групп.

Вполне транзитивные p-группы рассматривались также в работах Гриффита [11], Меджиббена [21], Каролл и Голдсмита [4], Файлса и Голдсмита [10], Парас и Струнгманна [24]. Вполне транзитивные группы без кручения исследовали Гриншпон [29], Хаузен [12], Дугас и Хаузен [7], Дугас и Шелах [8]. Вполне транзитивные непериодические модули исследовались в работе Файлса [9]. Хеннеке и Струнгманн [13] рассматривали вполне транзитивные p-локальные модули. В работе Гриншпона и Мисякова [32] охарактеризованы вполне транзитивные сепарабельные абелевы группы и их прямые произведения. Вполне транзитивность прямых сумм и прямых произведений произвольных абелевых групп рассматривалась в работах Гриншпона и Мисякова [31], Мисякова [42]. В работе Гриншпона [30] описаны вполне характеристические подгруппы и их решетки для вполне транзитивных групп из различных классов абелевых групп, а также изучались свойства вполне транзитивных групп, являющихся k-прямыми суммами абелевых групп. Обзор результатов по вполне транзитивным группам и группам близким к ним можно посмотреть в работе [28]. В книге [18] отмечен ряд проблем, связанных с исследованиями по вполне транзитивным абелевым группам. В частности, проблема 45 имеет следующий вид: "Найти необходимые и достаточные условия вполне транзитивности прямой суммы $\sum\limits_{i\in I}^{\oplus} G_i$ и произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$ некоторых групп G_i".

В данной статье приводятся основные результаты о вполне транзитивных абелевых группах, полученные автором в разные годы и связанные с вышеприведенной проблемой. В первом параграфе приводятся необходимые и достаточные условия вполне транзитивности прямых сумм произвольных абелевых групп и достаточные условия вполне транзитивности прямых произведений таких групп. Во втором параграфе описываются вполне транзитивные прямые произведения обобщенно сепарабельных групп без кручения. В третьем параграфе исследуется вполне транзитивность прямого произведения s-обобщенно узких групп. В четвертом параграфе дается полное описание вполне транзитивности прямого произведения произвольных сепарабельных групп. Выясняются вопросы о влиянии вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщенно узких групп, на сепарабельность прямого произведения групп. Приведенные доказательства существенно переработаны и унифицированы.

Введем следующие обозначения. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел; $\mathbb{Z}(p^\infty)$ – квазициклическая группа; π – множество всех простых чисел; $o(a)$ – порядок элемента a; $h_p(a)$ $(h_p^*(a))$ – высота (обобщенная высота) элемента a; $H_p(a)$ – индикатор (ульмовская последовательность) элемента a; $\chi_A(a)$ или $\chi(a)$ – характеристика элемента a в группе без кручения A; $\mathbb{H}_A(a)$ или $\mathbb{H}(a)$ – высотная матрица элемента a в группе A; $\mathrm{E}\,(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A, $\mathrm{Hom}(A,\, B)$

– группа гомоморфизмов из группы A в группу B; $t_A(a)$ или $t(a)$ – тип элемента a в группе без кручения A; $t(A)$ – тип однородной группы без кручения; $\pi(A)$ – множество простых чисел p таких, что $pA \neq A$; $T(A)$ – периодическая часть группы A; $T_p(A)$ – p-компонента группы A. Обозначения и терминология, используемые без пояснений, стандартные и взяты из [46, 47]. Все группы предполагаются абелевыми.

§1. Вполне транзитивность прямых сумм и прямых произведений абелевых групп

В данном параграфе устанавливается критерий вполне транзитивности прямых сумм абелевых групп и приводятся достаточные условия вполне транзитивности прямых произведений произвольных редуцированных абелевых групп. Строится пример, показывающий существование таких вполне транзитивных прямых произведений редуцированных групп, для которых одно из достаточных условий вполне транзитивности не выполняется.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ – последовательность всех простых чисел в порядке их возрастания. Напомним, что $h_p^*(a) = \sigma$ (где σ – порядковое число), если $a \in p^\sigma A \backslash p^{\sigma+1} A$. В случае, когда $a \in p^\tau A = p^{\tau+1}$, как обычно, полагаем $h_p^*(a) = \infty$ и считаем, что ∞ больше всякого порядкового числа. Матрицу размера $\omega \times \omega$, элементами которой являются порядковые числа или символ ∞, называют высотной матрицей. Такую матрицу

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

можно интерпретировать как функцию $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{O}n \cup \{\infty\}$ (где $\mathfrak{O}n$ – класс всех порядковых чисел) такую, что $f(i,j) = \alpha_{ij}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех высотных матриц. Пусть M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}$, $M_1 = (\alpha_{ij})$, $M_2 = (\beta_{ij})$, тогда полагаем $M_1 \leq M_2$, если $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$. Если $M' = \{(\alpha_{ij}^{(r)}) \,|\, r \in K\}$ – некоторое множество высотных матриц, то естественным образом определим $\inf_{\mathfrak{M}} M'$, а именно, $\inf_{\mathfrak{M}} M' = (\beta_{ij})$, где β_{ij} – наименьший из элементов $\alpha_{ij}^{(r)}$, $r \in K$. С элементом a группы A

связывают высотную матрицу

$$\mathbb{H}(a) = \begin{pmatrix} h^*_{p_1}(a) & h^*_{p_1}(p_1 a) & \dots & h^*_{p_1}(p_1^k a) & \dots \\ h^*_{p_2}(a) & h^*_{p_2}(p_2 a) & \dots & h^*_{p_2}(p_2^k a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h^*_{p_n}(a) & h^*_{p_n}(p_n a) & \dots & h^*_{p_n}(p_n^k a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = (\sigma_{ij}).$$

n-тую строку матрицы $\mathbb{H}(a)$ называют p_n-индикатором элемента a и обозначают $H_{p_n}(a)$.

Фукс [47], следуя Капланскому [17], называет редуцированную абелеву p-группу вполне транзитивной, если для любых элементов a и b этой группы, для которых $H_p(a) \leq H_p(b)$, существует эндоморфизм φ, переводящий a в b. Если по аналогии с этим понятием ввести понятие вполне транзитивности для произвольной абелевой группы, то есть назвать абелеву группу G вполне транзитивной, если для любых элементов a, $b \in G$ таких, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ существует $\varphi \in \mathrm{E}\,(G)$ со свойством $\varphi(a) = b$, то даже для довольно простых нередуцированных групп получаем, что они не являются вполне транзитивными в смысле введенного определения. Рассмотрим простой пример, в котором, как это и общепринято [46, 47], полагаем, что обобщенная p-высота нулевого элемента совпадает с его обычной p-высотой и равна ∞.

Пример 1.1. Пусть $G =< a > \oplus \mathbb{Z}(p_n^\infty)$, где $o(a) = p_n^s$ и $b \in \mathbb{Z}(p_n^\infty)$, $o(b) = p_n^k$, $k > s$. Имеем $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(b)$, так как $H_{p_n}(a) = (0, 1, \dots, s-1, \infty, \dots)$, $H_{p_n}(b) = (\infty, \dots)$ и $H_{p_i}(a) = H_{p_i}(b) = (\infty, \dots)$ для всех $i \neq n$. Однако не существует $\varphi \in \mathrm{E}\,(G)$ такого, что $\varphi(a) = b$, так как эндоморфизм не увеличивает порядок элемента.

Определение 1.1. (Гриншпон [31]) *Группа G называется вполне транзитивной, если для любых a, $b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \vdots o(b)$ (порядок элемента a делится на порядок элемента b) следует существование $\varphi \in \mathrm{E}\,(G)$ такого, что $\varphi\,(a) = b$. Полагая при этом, что если $o(a) = \infty$, то условие $o(a) \vdots o(b)$ выполняется для любого $b \in G$.*

Предложение 1.1. (Гриншпон [31]) *Для редуцированной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) для любых a, $b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \vdots o(b)$ следует

существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такого, что $\varphi(a) = b$;
2) для любых a, $b \in G$ из того, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ следует существование $\varphi \in E(G)$ такого, что $\varphi(a) = b$.

Покажем, что вопрос о вполне транзитивности группы сводится к соответствующему вопросу для ее редуцированной части.

Теорема 1.2. *Группа G вполне транзитивна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть вполне транзитивна.*

Доказательство. Если G – вполне транзитивная группа, то вполне транзитивность ее редуцированной части легко вытекает из определения 1.1. Обратно. Пусть $G = A \oplus B$, где A – редуцированная, B – делимая части группы G. Рассмотрим произвольные ненулевые элементы a, $b \in G$ такие, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ и $o(a) \vdots o(b)$. Пусть $a = a_1 + b_1$, $b = a_2 + b_2$ и
1) $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, где a_1, $a_2 \in A$; b_1, $b_2 \in B$. Тогда $\mathbb{H}(a) = \mathbb{H}(a_1)$, $\mathbb{H}(b) = \mathbb{H}(a_2)$ и $\mathbb{H}(a_1) \leq \mathbb{H}(a_2)$. Поэтому из вполне транзитивности группы A следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(A)$ такого, что $\varphi(a_1) = a_2$. Продолжим φ до эндоморфизма $\psi \in \mathrm{E}(G)$, полагая $\psi(c) = \varphi(c)$, если $c \in A$, и $\psi(c) = 0$, если $c \in B$.
2) $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ и пусть $o(a) < \infty$ (случай, когда $o(a) = \infty$ доказывается аналогично). Рассмотрим подгруппу $< a > \subset G$. Построим отображение $\varphi :< a > \longrightarrow B$ по правилу: $\varphi(a) = b$. Оно определено корректно, так как если $ma = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то $m \vdots o(a)$ и, следовательно, $m \vdots o(b)$. Тогда $\varphi(0) = \varphi(ma) = m\varphi(a) = mb = 0$. Легко проверяется, что φ – гомоморфизм. Пусть $\rho :< a > \longrightarrow G$ – вложение. Так как B – инъективная группа, то существует $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$ такой, что $\psi\rho = \varphi$, то есть $\psi(a) = b$.
3) Случай $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ невозможен.
4) Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то есть a, $b \in B$ и $o(a) \vdots o(b)$. Рассмотрим подгруппы $< a >$, $< b >$ из B. Существует гомоморфизм $\varphi :< a > \longrightarrow < b >$ такой, что $\varphi(a) = b$. Пусть $i :< a > \longrightarrow B$ – вложение. Так как B – инъективная группа, то $\psi i = \varphi$ для некоторого $\psi \in \mathrm{E}(B)$, причем $\psi(a) = b$. Эндоморфизм ψ очевидным образом продолжается до эндоморфизма группы G. Таким образом, группа G вполне транзитивна.

Из теоремы 1.2 вытекает, что для изучения свойства вполне транзитивности групп достаточно рассматривать только редуцированные. Поэтому в дальнейшем под группой будем понимать редуцированную группу.

Дадим два основных понятия, которые будем использовать при исследовании вполне транзитивности прямых сумм и прямых произведений. Впервые они были сформулированы С. Я. Гриншпоном [29] для групп без кручения. Первое из них позже и независимо появилось также у Файлса и Голдсмита [10].

Определение 1.2. *Систему групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *будем называть вполне транзитивной, если для каждой пары групп* $(G_i,\, G_j)_{i,\,j\in I}$ *(i может совпадать с j) выполняется условие: из того, что* $a \in G_i$, $b \in G_j$ *и* $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$ *следует существование* $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_i,\, G_j)$ *со свойством* $\varphi(a) = b$.

Определение 1.3. *Будем говорить, что система групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц, если для каждой группы* G_j *и для любого элемента* $0 \neq a_j \in G_j$ $(j \in I)$ *из выполнения соотношений:*
1) $\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_1}), \ldots, \mathbb{H}(a_{i_s})\} \leq \mathbb{H}(a_j)$, *где* $a_{i_k} \in G_{i_k}$, $i_k \in I$, $k = \overline{1,\, s}$, $i_k \neq i_l$, *при* $k \neq l$;
2) $\mathbb{H}(a_j) \ngeq \mathbb{H}(a_{i_k})$ *для всех* $k = \overline{1,\, s}$,
следует существование элементов $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r} \in G_j$ *со свойствами:*
1') $a_{j_1} + \ldots + a_{j_r} = a_j$;
2') для каждого элемента a_{j_l} $(l = \overline{1,\, r})$ *найдется такой элемент* a_{i_k} $(k = \overline{1,\, s})$, *что* $\mathbb{H}(a_{j_l}) \geq \mathbb{H}(a_{i_k})$.

Часто вместо фразы "условие монотонности для высотных матриц" будем писать просто "условие монотонности". Нетрудно показать, что если система групп вполне транзитивна, то и всякая ее подсистема вполне транзитивна. Если система групп удовлетворяет условию монотонности, то и всякая ее подсистема удовлетворяет этому свойству.

Теорема 1.3. *Группа* $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда система групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Пусть G – вполне транзитивная группа. Рассмотрим произвольные группы G_α, $G_\beta \in \{G_i\}_{i\in I}$ и элементы $g_\alpha \in G_\alpha$, $g_\beta \in G_\beta$ такие, что $\mathbb{H}(g_\alpha) \le \mathbb{H}(g_\beta)$. Тогда $\mathbb{H}(\rho_\alpha g_\alpha) \le \mathbb{H}(\rho_\beta g_\beta)$, где $\rho_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$, $\rho_\beta : G_\beta \longrightarrow G$ – вложения. Из вполне транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такого, что $(\varphi\rho_\alpha)(g_\alpha) = \rho_\beta(g_\beta)$ и, значит, $(\pi_\beta\varphi\rho_\alpha)(g_\alpha) = g_\beta$, где $\pi_\beta : G \longrightarrow G_\beta$ – проекция.

Покажем, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности. Рассмотрим произвольную группу $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ и элемент $0 \ne a_j \in G_j$ такой, что $\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_1}), \dots, \mathbb{H}(a_{i_s})\} \le \mathbb{H}(a_j)$, причем $\mathbb{H}(a_j) \ngeq \mathbb{H}(a_{i_k})$ для всех $k = \overline{1, s}$. Для каждого $k = \overline{1, s}$ рассмотрим вложения $\rho_{i_k} : G_{i_k} \longrightarrow G$ и $\rho_j : G_j \longrightarrow G$, где $G_{i_k} \in \{G_i\}_{i\in I}$ и $a_{i_k} \in G_{i_k}$. Тогда $\mathbb{H}(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \dots + \rho_{i_s}(a_{i_s})) \le \mathbb{H}(\rho_j(a_j))$, а из вполне транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такого, что $\rho_j(a_j) = \varphi(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \dots + \rho_{i_s}(a_{i_s})) = (\varphi\rho_{i_1})(a_{i_1}) + \dots + (\varphi\rho_{i_s})(a_{i_s})$. Имеем $a_j = (\pi_j\rho_j)(a_j) = (\pi_j\varphi\rho_{i_1})(a_{i_1}) + \dots + (\pi_j\varphi\rho_{i_s})(a_{i_s})$, где $\pi_j : G \longrightarrow G_j$ – проекция. Пусть $a_{j_k} = (\pi_j\varphi\rho_{i_k})(a_{i_k})$ для любого $k = \overline{1, s}$. Тогда $a_j = a_{j_1} + \dots + a_{j_s}$, причем для каждого элемента a_{j_k} $(k = \overline{1, s})$ существует элемент a_{i_k} $(k = \overline{1, s})$ такой, что $\mathbb{H}(a_{i_k}) \le \mathbb{H}(a_{j_k})$. Обратно. Пусть a, $b \in G$, причем $\mathbb{H}(a) \le \mathbb{H}(b)$. Пусть $a = a_{i_1} + \dots + a_{i_r}$, $b = b_{l_1} + \dots + b_{l_n}$, где $a_{i_t} \in G_{i_t}$, $b_{l_j} \in G_{l_j}$, i_t, $l_j \in I$ для любых $t = \overline{1, r}$ и $j = \overline{1, n}$. Покажем, что для всякого элемента b_{l_j} $(j = \overline{1, n})$ существует $\varphi_j \in \mathrm{Hom}(G, G_{l_J})$ такое, что $\varphi_j(a) = b_{l_j}$. Тогда $b = (\varphi_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n})(a)$ и $\varphi_{j_1} + \dots + \varphi_{j_n} \in \mathrm{E}(G)$. Если для элемента b_{l_j} найдется элемент a_{i_k} такой, что $\mathbb{H}(b_{l_j}) \ge \mathbb{H}(a_{i_k})$, то из вполне транзитивности системы $\{G_i\}_{i\in I}$ следует существование $\psi_j \in \mathrm{Hom}(G_{i_k}, G_{l_j})$, обладающего свойством $\psi_j(a_{i_k}) = b_{l_j}$. Тогда положим $\varphi_j(a) = \psi_j(a_{i_k})$, то есть $\varphi_j = \psi_j\pi_{i_k}$, где $\pi_{i_k} : G \longrightarrow G_{i_k}$ – проекция. Пусть такого элемента a_{i_k} не существует, что $\mathbb{H}(b_{l_j}) \ge \mathbb{H}(a_{i_k})$. Так как $\mathbb{H}(b_{l_j}) \ge \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,r}}$ и система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, то существуют элементы $b_{l_{j_\tau}} \in G_{l_j}$ $(\tau = \overline{1, t})$ такие, что $b_{l_j} = b_{l_{j_1}} + \dots + b_{l_{j_t}}$, причем для любого $b_{l_{j_\tau}}$ $(\tau = \overline{1, t})$ найдется $a_{i_{k_\tau}} \in \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,r}}$ такой, что $\mathbb{H}(b_{l_{j_\tau}}) \ge \mathbb{H}(a_{i_{k_\tau}})$. Тогда из вполне транзитивности системы $\{G_i\}_{i\in I}$ следует существование $\psi_{j_\tau} \in \mathrm{Hom}(G_{i_{k_\tau}}, G_{l_j})$ такого, что $\psi_{j_\tau}(a_{i_{k_\tau}}) = b_{l_{j_\tau}}$, причем $\psi_{j_1}(a_{i_{k_1}}) + \dots + \psi_{j_t}(a_{i_{k_t}}) = b_{l_j}$. Тогда $\varphi_j(a) = \psi_{j_1}(a_{i_{k_1}}) + \dots + \psi_{j_t}(a_{i_{k_t}})$, где $\varphi_j = \psi_{j_1}\pi_{i_{k_1}} + \dots + \psi_{j_t}\pi_{i_{k_t}}$ и $\pi_{i_{k_\tau}} : G \longrightarrow G_{i_{k_\tau}}$ $(\tau = \overline{1, t})$ – проекции. Таким образом, $\varphi_j(a) = b_{l_j}$.

Следующее предложение показывает, что вполне транзитивность и выполнение условия монотонности для системы групп $\{G_i\}_{i\in I}$ являются необходимыми для вполне транзитивности прямого произведения произвольных групп.

Предложение 1.4. *Если* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивная группа, то система* $\{G_i\}_{i\in I}$ *вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству необходимости предыдущей теоремы.

Следующее определение будет полезно для выяснения некоторых достаточных условий для вполне транзитивности группы $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$.

Определение 1.4. *Будем говорить, что система групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *удовлетворяет условию конечности для высотных матриц, если для любой группы* $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ *и любого элемента* $0 \neq g_j \in G_j$ *такого, что* $o(g_j) = \infty$, *из выполнения условия:*

$$\mathbb{H}(g_j) \geq \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\gamma)\}_{\gamma\in J},\ \textit{где}\, |J| = \aleph_0 \,\textit{и}\, J \subseteq I,$$

следует существование конечной подсистемы элементов $\{g_{\gamma_k}\}_{\gamma_k\in J,\, k=\overline{1,n}}$ *такой, что*

$$\mathbb{H}(g_j) \geq \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\gamma_k})\}_{\gamma_k\in J,\, k=\overline{1,n}}\,.$$

Иногда вместо термина "условие конечности для высотных матриц" будем писать просто "условие конечности".

Предложение 1.5. *Группа* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивна, если система групп* $\{G_i\}_{i\in I}$ *вполне транзитивна и удовлетворяет условиям монотонности и конечности.*

Доказательство. Пусть $a,\, b \in G$ и $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$, где $a = (\dots, a_i, \dots)$, $b = (\dots, b_i, \dots)$. Покажем, что для произвольной координаты b_j элемента b найдется конечная подсистема координат $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,n}}$ элемента a такая, что $\mathbb{H}(b_j) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,n}}$. Рассмотрим два случая: 1) $o(b_j) < \infty$, 2)

$o(b_j)=\infty$, при этом будем считать, что почти все координаты a_i элемента a отличны от нуля. Пусть $o(b_j)<\infty$. Так как высотная матрица $\mathbb{H}(b_j)$ содержит конечное число σ_{nk} порядковых чисел отличных от ∞ и $\mathbb{H}(b_j)\geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i)\}_{i\in I}$, то существует конечное подмножество $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,n}}\subset\{a_i\}_{i\in I}$ такое, что $\mathbb{H}(b_j)\geq\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,n}}$. Если $o(b_j)=\infty$, то, учитывая неравенство $\mathbb{H}(b_j)\geq\mathbb{H}(a)$ и что высотная матрица любого элемента группы состоит не более чем из счетного множества порядковых чисел, получаем существование подмножества $\{a_\tau\}_{\tau\in J}\subseteq\{a_i\}_{i\in I}$, где $|J|\leq\aleph_0$, такого, что $\mathbb{H}(b_j)\geq\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_\tau)\}_{\tau\in J}$. Пусть $|J|=\aleph_0$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности, то существует конечное подмножество $\{a_{\tau_l}\}_{l=\overline{1,m}}\subset\{a_\tau\}_{\tau\in J}$ такое, что $\mathbb{H}(b_j)\geq\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{\tau_l})\}_{l=\overline{1,m}}$.

Покажем, что существует $\psi\in\mathrm{E}(G)$ такой, что $\psi(a)=b$. Для этого достаточно заметить, что для произвольной координаты b_j элемента b найдется гомоморфизм $\psi_j\in\mathrm{Hom}(G,G_j)$ такой, что $\psi_j(a)=b_j$, тогда из [46, теорема 8.2] будет следовать существование требуемого гомоморфизма ψ. Пусть $\mathbb{H}(b_j)\geq\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{i_k\in I,\,k=\overline{1,n}}$, где $b_j\in G_j$, $a_{i_k}\in G_{i_k}$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности, то подсистема $\{G_j,G_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$, где $G_j\neq G_{i_k}$ для любого $k=\overline{1,n}$, также вполне транзитивна и удовлетворяет условию монотонности. Следовательно, группа $G'=G_j\oplus\bigoplus\limits_{k=1}^{n}G_{i_k}$, как вытекает из теоремы 1.3, вполне транзитивна. Поэтому будет существовать гомоморфизм $\psi'_j\in\mathrm{Hom}(G',G_j)$ такой, что $(\psi'_j\rho')(a_{i_1}+\ldots+a_{i_n})=b_j$, где $\rho':\bigoplus\limits_{k=1}^{n}G_{i_k}\longrightarrow G'$ – вложение, $\psi'_j=\pi'_j\psi''_j$, $\pi'_j:G'\longrightarrow G_j$ – проекция, а $\psi''_j\in\mathrm{E}(G')$, причем $(\psi''_j\rho')(a_{i_1}+\ldots+a_{i_n})=\rho_j(b_j)$, $\rho_j:G_j\longrightarrow G'$ – вложение. Так как G' – прямое слагаемое группы G, то можно продолжить гомоморфизм $\psi'_j\rho'$ до гомоморфизма $\psi_j\in\mathrm{Hom}(G,G_j)$, переводящего a в элемент b_j. Если же группа G_j совпадает с одной из групп G_{i_k}, $k=\overline{1,n}$, то, проведя аналогичные рассуждения для подсистемы $\{G_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$, получим также гомоморфизм $\psi_j\in\mathrm{Hom}(G,G_j)$, который переведет элемент a в элемент b_j.

Следующий пример показывает, что существует вполне транзитивная группа $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$ такая, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ условию конечности не удовлетворяет.

Пример 1.2. Пусть $A = \prod\limits_{i=0}^{\infty} A_i$, где A_0 – группа целых p-адических чисел, а A_i $(i = \overline{1, \infty})$ – циклические группы порядка p^i (здесь p – фиксированное простое число). Так как каждая группа $A_i\,(i = \overline{0, \infty})$ – алгебраически компактна, то A – алгебраически компактная группа [46], а, значит, как следует из следствия 3.10, вполне транзитивна. Рассмотрим элементы $a_i \in A_i\,(i = \overline{0, \infty})$ такие, что $h_p(a_i) = 0$, тогда $\mathbb{H}(a_0) = \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i)\}_{i=\overline{1,\infty}}$. В то же время не существует конечного подмножества элементов $\{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}} \subset \{a_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$ такого, что $\mathbb{H}(a_0) = \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,n}}$.

§2. **Вполне транзитивность групп без кручения**

В данном параграфе показывается, что условие монотонности, наложенное на систему сервантных подгрупп ранга 1 произвольной группы без кручения, эквивалентно ее однородности. Характеризуются вполне транзитивные сепарабельные группы без кручения. Рассматриваются вопросы, связанные с вполне транзитивностью прямого произведения обобщенно сепарабельных, сепарабельных и однородно разложимых групп без кручения.

Лемма 2.1. *Система $\{A_i\}_{i\in I}$ однородных групп без кручения удовлетворяет условию монотонности тогда и только тогда, когда для любых групп A_α, $A_\beta \in \{A_i\}_{i\in I}$ таких, что $t(A_\alpha) \neq t(A_\beta)$, следует, что $\pi(A_\alpha)\bigcap\pi(A_\beta) = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть система $\{A_i\}_{i\in I}$ однородных групп без кручения удовлетворяет условию монотонности и существуют группы A_α, $A_\beta \in \{A_i\}_{i\in I}$ такие, что $t(A_\alpha) \neq t(A_\beta)$ и $\pi(A_\alpha)\bigcap\pi(A_\beta) \neq \emptyset$. Пусть, для определенности, $t(A_\alpha) \ngeq t(A_\beta)$ и p – такое простое число, что $p \in \pi(A_\alpha)\bigcap\pi(A_\beta)$. Тогда из групп A_α и A_β выберем соответственно элементы a_α и a_β такие, что $h_p(a_\beta) \leq h_p(a_\alpha)$. Тогда $\chi(a_\alpha) \geq \inf\{\chi(pa_\alpha), \chi(a_\beta)\}$, причем $\chi(a_\alpha) < \chi(pa_\alpha)$, так как $h_p(a_\alpha) + 1 = h_p(pa_\alpha)$ и $\chi(a_\alpha) \ngeq \chi(a_\beta)$, потому что $t(A_\alpha) \ngeq t(A_\beta)$. Поскольку система $\{A_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, то существуют элементы $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots , a_{\alpha_n} \in A_\alpha$ такие, что $a_\alpha = a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_n}$, причем $\chi(a_{\alpha_k}) \geq \chi(a_\beta)$ для любого $k = \overline{1, n}$ или $\chi(a_{\alpha_k}) \geq \chi(pa_\alpha)$. Так как $t(A_\alpha) \ngeq t(A_\beta)$, то $\chi(a_{\alpha_k}) \ngeq \chi(a_\beta)$ для любого $k = \overline{1, n}$. Поэтому $\chi(a_{\alpha_k}) \geq \chi(pa_\alpha)$ для каждого $k = \overline{1, n}$. Тогда

$\chi(a_\alpha) \geq \inf\{\chi(a_{\alpha_k})\}_{k=\overline{1,n}} \geq \chi(pa_\alpha)$, что невозможно.
Обратно. Рассмотрим произвольную группу $A_j \in \{A_i\}_{i\in I}$ и произвольный элемент $0 \neq a_j \in A_j$ такой, что $\chi(a_j) \geq \inf\{\chi(a_{i_1}), \ldots, \chi(a_{i_s})\}$, где $a_{i_k} \in A_{i_k}$, $i_k \in I$, $k = \overline{1,\, s}$, $i_k \neq i_l$ при $k \neq l$, причем $\chi(a_j) \ngeq \chi(a_{i_k})$ для любого $k = \overline{1,\, s}$. Так как система $\{A_i\}_{i\in I}$ состоит из редуцированных групп, то существует такое простое число p, что $p \in \pi(A_j)$. Так как $h_p(a_j) \geq \inf\{h_p(a_{i_k})\}_{k=\overline{1,\, s}}$, то найдется элемент $a_{i_\beta} \in \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,\, s}}$ такой, что $h_p(a_j) \geq h_p(a_{i_\beta})$. Тогда, как следует из условия, $t(A_j) = t(A_{i_\beta})$. Так как для почти всех простых чисел q выполняется $h_q(a_j) = h_q(a_{i_\beta})$, то пусть $q_1, \ldots, q_n$ – все такие простые числа отличные от p, для которых $h_{q_\alpha}(a_j) \neq h_{q_\alpha}(a_{i_\beta})$. Тогда для каждого простого числа q_α $(\alpha = \overline{1,\, n})$ будет существовать элемент $a_i^{(\alpha)} \in \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,\, s}}$ такой, что $h_{q_\alpha}(a_i^{(\alpha)}) \leq h_{q_\alpha}(a_j)$. Из построения системы $\{a_{i_\beta},\, a_i^{(\alpha)}\}_{\alpha=\overline{1,\, n}}$ следует, что для любого элемента c из этой системы $t(a_j) = t(c)$, причем $\chi(a_j) \geq \inf\{\chi(a_{i_\beta}),\, \chi(a_i^{(\alpha)})\}_{\alpha=\overline{1,\, n}}$. Так как система $\{A_j,\, A_{i_\beta},\, A_i^{(\alpha)}\}_{\alpha=\overline{1,\, n}}$ состоит из групп одного и того же типа, то, как следует из [29, лемма 2.2], она удовлетворяет условию монотонности. Поэтому существуют элементы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r} \in A_j$ такие, что $a_j = a_{j_1} + \ldots + a_{j_r}$, причем для каждого a_{j_l} $(l = \overline{1,\, r})$ найдется такой элемент $d \in \{a_{i_\beta},\, a_i^{(\alpha)}\}_{\alpha=\overline{1,\, n}}$, что $\chi(a_{j_l}) \geq \chi(d)$. Тогда $\{a_{i_\beta},\, a_i^{(\alpha)}\}_{\alpha=\overline{1,\, n}} \subseteq \{a_{i_k}\}_{k=\overline{1,\, s}}$.

Лемма 2.2. *Если группы G_i $(i \in I)$ являются однородными прямыми слагаемыми без кручения произвольной вполне транзитивной группы G, то система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Пусть выполняется условие леммы, тогда, согласно лемме 2.1, нам нужно показать, что для любых групп $A,\, B \in \{G_i\}_{i\in I}$ таких, что $t(A) \neq t(B)$ следует, что $\pi(A) \bigcap \pi(B) = \emptyset$. Пусть, для определенности, $t(A) \ngeq t(B)$. Если группы A и B лежат в одном разложении G, то утверждение леммы вытекает из теоремы 1.3 и леммы 2.1. Пусть группы A и B лежат в разных разложениях группы G, то есть $A \oplus A_1 = G = B \oplus B_1$. Рассмотрим произвольную группу $C \in \{A, B\}$ и произвольный элемент $0 \neq c \in C$ такой, что $\mathbb{H}(c) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a),\, \mathbb{H}(b)\}$, где $a \in A$, $b \in B$, причем $\mathbb{H}(c) \ngeq \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(c) \ngeq \mathbb{H}(b)$. Покажем, что элемент $b \in A_1$. Действительно, так как $t(A) \ngeq t(B)$ и $b \neq 0$, то $b \notin A$. Пусть $b = a' + a_1'$, где $a' \in A$, $a_1' \in A_1$ (рассматриваем разложение $G = A \oplus A_1$), тогда $\mathbb{H}(b) = \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a'),\, \mathbb{H}(a_1')\} \leq \mathbb{H}(a')$. Это противоречит тому, что

$t(A) \not\geq t(B)$. Следовательно, $b \in A_1$, тогда $\mathbb{H}(a+b) \leq \mathbb{H}(c)$. Из вполне транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ такого, что $c = \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Так как $\mathbb{H}(\varphi(a)) \geq \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(\varphi(b)) \geq \mathbb{H}(b)$, то система $\{A, B\}$ удовлетворяет условию монотонности и по лемме 2.1 следует, что $\pi(A) \bigcap \pi(B) = \emptyset$.

В следующей лемме устанавливается, что условие монотонности системы сервантных подгрупп ранга 1 группы без кручения G существенно влияет на ее строение.

Лемма 2.3. *Редуцированная группа без кручения G является однородной тогда и только тогда, когда система $\{A_i\}_{i \in I}$ всех ее сервантных подгрупп ранга 1 удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 2.1. Докажем достаточность. Допустим противное, то есть пусть G – неоднородная группа, тогда существуют ненулевые элементы $a, b \in G$ такие, что $t(a) \neq t(b)$. Тогда, как следует из леммы 2.1, $\pi(< a >_*) \cap \pi(< b >_*) = \emptyset$. Следовательно, $t(a+b) = t(a) \cap t(b)$, откуда

$$t(a+b) < t(a) \text{ и } \pi(< a+b >_*) \cap \pi(< a >_*) = \pi(< a >_*) \neq \emptyset.$$

Тогда по лемме 2.1 система $\{< a+b >_*, < a >_*\}$ не удовлетворяет условию монотонности, что противоречит нашему предположению и замечанию перед теоремой 1.3.

В следующей теореме дается характеризация вполне транзитивных сепарабельных групп без кручения.

Теорема 2.4. *Для сепарабельной группы без кручения G следующие условия эквивалентны:*
1) G – однородно разложимая группа, причем для любых однородных прямых слагаемых G_i, G_j из G таких, что $t(G_i) \neq t(G_j)$, следует, что $\pi(G_i) \bigcap \pi(G_j) = \emptyset$;
2) для любых неизоморфных прямых слагаемых A и B ранга 1 из G следует, что $\pi(A) \bigcap \pi(B) = \emptyset$;
3) система $\{A_i\}_{i \in I}$ всех прямых слагаемых ранга 1 группы G удовлетворяет условию монотонности;

4) группа G вполне транзитивна.

Доказательство. Что из условия 1) следует 4) вытекает из [29, следствие 2.13]; используя лемму 2.2 из 4) получаем 3); эквивалентность условий 2) и 3) устанавливается в лемме 2.1. Покажем, что из 2) следует 1). Пусть $\tau(G)$ обозначает множество различных типов всех прямых слагаемых ранга 1 в G. Тогда для каждого $\tau \in \tau(G)$ рассмотрим подгруппы $G^{(\tau)}$, сервантно порожденные всеми прямыми слагаемыми ранга 1 типа τ. Покажем, что $G^{(\tau)}$ – однородная группа типа τ, то есть что произвольный элемент $g \in G^{(\tau)}$ имеет тип τ в $G^{(\tau)}$. Так как в G элемент g является решением некоторого уравнения $nx = a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}$, где $a_{j_l} \in A_{j_l}$, $t(A_{j_l}) = \tau$ и $A_{j_l} \in \{A_i\}_{i\in I}$ для любого $l = \overline{1, k}$ (здесь $\{A_i\}_{i\in I}$ – система всех прямых слагаемых ранга 1 группы G), то докажем индукцией по k, что

$$t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}) = t(a_{j_1}) \cap \ldots \cap t(a_{j_k}),. \qquad (*)$$

Пусть $k = 2$. Тогда группу G можно представить в виде $G = A_{j_1} \oplus H$. Если $a_{j_2} \in H$, то $t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2})$. Если $a_{j_2} \in A_{j_1}$, то $a_{j_1} + a_{j_2} \in A_{j_1}$ и $t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2})$. Если $a_{j_2} = a'_{j_1} + h$, где $a'_{j_1} \in A_{j_1}$, $h \in H$, то $a_{j_1} + a_{j_2} = a_{j_1} + a'_{j_1} + h$ и $t(a_{j_1} + a_{j_2}) = t(a_{j_1} + a'_{j_1} + h) = t(a_{j_1} + a'_{j_1}) \cap t(h) = t(a_{j_1}) \cap t(a'_{j_1}) \cap t(h)$. Так как $t(a_{j_2}) = t(a'_{j_1}) \cap t(h)$, то $t(a_{j_1}) \cap t(a_{j_2}) = t(a_{j_1} + a_{j_2})$. Пусть для $k = m - 1$ $(m \geq 3)$ равенство $(*)$ выполняется. Покажем его справедливость при $k = m$. Используя индуктивное предположение получим, что $t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}) = t(a_{j_1} + \ldots + a_{j_{k-1}}) \cap t(a_{j_k}) = t(a_{j_1}) \cap \ldots \cap t(a_{j_{k-1}}) \cap t(a_{j_k})$. Заметим также, что для любых τ_1, $\tau_2 \in \tau(G)$ следует, что $t(G^{(\tau_1)}) \neq t(G^{(\tau_2)})$, а так как $t(G^{(\tau_1)}) = t(A^{(\tau_1)})$, $t(G^{(\tau_2)}) = t(A^{(\tau_2)})$ для некоторых $A^{(\tau_1)}$, $A^{(\tau_2)} \in \{A_i\}_{i\in I}$, и система $\{A_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию 2), то $\pi(G^{(\tau_1)}) \cap \pi(G^{(\tau_2)}) = \emptyset$. Покажем, что $G = \bigoplus\limits_{\tau\in\tau(G)} G^{(\tau)}$. Пусть $G^{(\alpha)}$, $G^{(\tau_1)}, \ldots, G^{(\tau_k)} \in \{G^{(\tau)}\}_{\tau\in\tau(G)}$, где $G^{(\tau_i)} \neq G^{(\tau_j)}$ при $i \neq j$ для любых i, $j = \overline{1, k}$ и $G^{(\alpha)} \neq G^{(\tau_i)}$ для любого $i = \overline{1, k}$. Допустим, что существует $0 \neq b \in G^{(\alpha)} \cap (G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)})$. Так как G – редуцированная группа, то существует простое число p такое, что $h_p(b) \neq \infty$ в группе $G^{(\alpha)}$, а значит и в G. С другой стороны, так как $\pi(G^{(1)}) \cap \pi(G^{(2)}) = \emptyset$ для любых $G^{(1)}$, $G^{(2)} \in \{G^{(\tau)}\}_{\tau\in\tau(G)}$, $G^{(1)} \neq G^{(2)}$, то $t(G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}) = t(G^{(\tau_1)}) \cap \ldots \cap t(G^{(\tau_k)})$ и так как $\pi(G^{(\alpha)}) \cap \pi(G^{(i)}) = \emptyset$ для любого $i = \overline{1, k}$, то $\pi(G^{(\alpha)}) \cap \pi(G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}) = \emptyset$. Следовательно, $h_p(b) = \infty$ в группе $G^{(\tau_1)} + \ldots + G^{(\tau_k)}$, а значит и в группе G, что противоречит единственности высоты элемента в группе. Покажем, что группа G порождается множеством $\{G^{(\tau)}\}_{\tau\in\tau(G)}$. Действительно, если предположить, что существует элемент $g \in G$ такой, что $g \notin \bigoplus\limits_{\tau\in\tau(G)} G^{(\tau)}$, то из сепарабельности группы G следует, что элемент g можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое $F = F_1 + \ldots + F_t$ группы G. Так как для каждого $l = \overline{1,\, t}$ существует $\tau_l \in \tau(G)$ такое, что $F_l \subseteq G^{(\tau_l)}$, то элемент $g \in \bigoplus\limits_{l=1}^{t} G^{(\tau_l)}$, что противоречит нашему предположению.

Определение 2.1. *Назовем систему групп без кручения $\{G_i\}_{i\in I}$ эндотранзитивной, если из того, что $a \in G_i$, $b \in G_j$ и $\chi(a) = \chi(b)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_i,\, G_j)$ со свойством $\varphi(a) = b$.*

Если система $\{G_i\}_{i\in I}$ состоит из одной группы, то приходим к понятию эндотранзитивности группы, введенному в [35].

Следующее простое утверждение показывает, что для системы, состоящей из однородных групп одного и того же типа, понятия вполне транзитивности и эндотранзитивности совпадают.

Лемма 2.5. *Произвольная система однородных групп $\{G_i\}_{i\in I}$ одного и того же типа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда она эндотранзитивна.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим произвольные группы $G_j,\, G_t \in \{G_i\}_{i\in I}$ и произвольные элементы $a \in G_j$, $b \in G_t$ такие, что $\chi(a) \le \chi(b)$. Если $\chi(a) = \chi(b)$, то существует гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(G_j,\, G_t)$ такой, что $\psi(a) = b$. Пусть теперь $\chi(a) < \chi(b)$. Так как характеристики $\chi(a)$ и $\chi(b)$ эквивалентны, то существует натуральное число n такое, что $\chi(na) = \chi(b)$. Значит найдется гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(G_j,\, G_t)$ такой, что $\varphi(na) = b$. Следовательно, гомоморфизм $\psi = n\varphi$ переведет a в элемент b.

Напомним, что группа без кручения G называется *обобщенно сепарабельной* [29], если каждое конечное подмножество элементов из G содержится в некотором однородно разложимом прямом слагаемом группы G.

Теорема 2.6. *Группа* $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$*, где* A_i $(i \in I)$ *– обобщенно сепарабельные группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых однородных прямых слагаемых* B *и* C *из* A *выполняются условия:*
1) система $\{B,\, C\}$ *эндотранзитивна;*
2) если $t(B) \neq t(C)$*, то* $\pi(B) \cap \pi(C) = \emptyset$*.*

Доказательство. Необходимость. Условие 2) вытекает из лемм 2.1 и 2.2. Покажем справедливость условия 1). Из теоремы 1.3 и леммы 2.5 следует, что система групп $\{B,\, C\}$, удовлетворяющая условию теоремы, эндотранзитивна, если эти группы лежат в одном разложении группы A, а также если $t(B) \neq t(C)$, поскольку в этом случае $\mathrm{Hom}(B,\, C) = \mathrm{Hom}(C,\, B) = 0$. Пусть $t(B) = t(C)$ и группы B, C лежат в разных разложениях группы A. Рассмотрим произвольные элементы $b \in B$, $c \in C$ такие, что $\chi(b) = \chi(c)$, тогда $\chi(\rho_1(b)) = \chi(\rho_2(c))$, где $\rho_1 : B \longrightarrow A$, $\rho_2 : C \longrightarrow A$ – вложения. Из вполне транзитивности группы A следует существование $\varphi \in \mathrm{E}\,(A)$ такого, что $\varphi(\rho_1(b)) = \rho_2(c)$. Тогда существует $\psi \in \mathrm{Hom}(B,\, C)$ такой, что $\psi(b) = c$, где $\psi = \pi\varphi\rho_1$ и $\pi : A \longrightarrow C$ – проекция.

Достаточность. Пусть $a,\, b \in A$, причем $\chi(a) \leq \chi(b)$ и $a = (\ldots\,,\, a_i,\, \ldots)$, $b = (\ldots\,,\, b_i,\, \ldots)$, где $a_i,\, b_i \in A_i$ для всякого $i \in I$. Так как A_i – обобщенно сепарабельная группа, то b_i вкладывается в однородно разложимое прямое слагаемое. Пусть H_i – одно из минимальных (относительно включения) таких слагаемых. Имеем: $b_i = b_{i_1} + \ldots + b_{i_m}$, где $H_i = H_{i_1} + \ldots + H_{i_m}$ – разложение H_i в прямую сумму однородных групп (где m зависит от индекса i и от выбора H_i). Такое разложение элемента b_i будем называть однородным. Поскольку для любого слагаемого b_{i_n} $(n = \overline{1,\, m})$ $\chi(b_{i_n}) \geq \chi(a)$, то достаточно показать, что существует $\psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A,\, H_{i_n})$ такой, что $\psi_{i_n}(a) = b_{i_n}$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{i_n}(a) = b_i$, где $\sum\limits_{n=1}^{m} \psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A,\, A_i)$. Тогда, как следует из [46, теорема 8.2], будет существовать $\psi \in \mathrm{E}\,(A)$ такой, что $\psi(a) = b$. Так как условие 2) данной теоремы выполняется и $\chi(b_{i_n}) \geq \chi(a)$, то найдется система элементов $\{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,\, d}}$ такая, что $a_i = a_{i_1} + \ldots + a_{i_d}$ и $t(a_{i_l}) = t(b_{i_n})$ для любого $l = \overline{1,\, d}$, причем $\chi(b_{i_n}) \geq \inf\{\chi(a_{i_l})\}_{l=\overline{1,\, d}}$. Если существует $l = \overline{1,\, d}$ такой, что $\chi(a_{i_l}) \leq \chi(b_{i_n})$, то из вполне транзитивности однородной системы $\{H_{i_l},\, H_{i_n}\}$, которая следует из условия 1) и леммы 2.5, вытекает существование $\varphi_{i_l} \in \mathrm{Hom}(H_{i_l},\, H_{i_n})$ такого, что $\varphi_{i_l}(a_{i_l}) = b_{i_n}$. Тогда существует $\psi_{i_n} \in \mathrm{Hom}(A,\, H_{i_n})$, отображающий элемент a в элемент b_{i_n}, где $\psi_{i_n} = \varphi_{i_l}\pi_{i_l}\pi$ и $\pi : A \longrightarrow A_i$, $\pi_{i_l} : A_i \longrightarrow H_{i_l}$ – проекции. Если такого элемента a_{i_l} $(l = \overline{1, d})$ не найдется, то, как вытекает из леммы 2.1 и из условия 2) данной теоремы, система $\{H_{i_l}, H_{i_n}\}_{l=\overline{1,d}}$, состоящая из однородных групп одного и того же типа, удовлетворяет условию монотонности. Тогда существуют элементы $b_{i_n}^{(1)}, \dots, b_{i_n}^{(\gamma)} \in H_{i_n}$ такие, что $b_{i_n} = b_{i_n}^{(1)}, \dots, b_{i_n}^{(\gamma)}$, причем для каждого $b_{i_n}^{(t)}$ $(t = \overline{1, \gamma})$, найдется элемент $a_{i_l}^{(t)} \in \{a_{i_l}\}_{l=\overline{1,d}}$, для которого $\chi(b_{i_n}^{(t)}) \geq \chi(a_{i_l}^{(t)})$. Так как для каждого $t = \overline{1, \gamma}$ система $\{H_{i_l}^{(t)}, H_{i_n}\}$ вполне транзитивна, то существуют $\varphi_{i_t} \in \mathrm{Hom}(H_{i_l}^{(t)}, H_{i_n})$ $(t = \overline{1, \gamma})$, переводящие элементы $a_{i_l}^{(t)}$ в элементы $b_{i_n}^{(t)}$ соответственно (здесь $H_{i_l}^{(t)} \in \{H_{i_l}\}_{l=\overline{1,d}}$ для каждого $t = \overline{1, \gamma}$), тогда $\sum\limits_{t=1}^{\gamma}\varphi_{i_t}(a_{i_l}^{(t)}) = b_{i_n}$. Следовательно, существует гомоморфизм $\psi_{i_t} = \sum\limits_{t=1}^{\gamma}\varphi_{i_t}\pi_{i_t}\pi_i$ такой, что $\psi_{i_t}a = b_{i_n}$, где $\pi_{i_t} : A_i \longrightarrow H_{i_t}$ $\pi_i : A \longrightarrow A_i$ – проекции.

Следствие 2.7. *Группа $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$, где A_i $(i \in I)$ – сепарабельные группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A следует, что $\pi(B) \bigcap \pi(C) = \emptyset$.*

Следствие 2.8.[35] *Векторная группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A следует, что $\pi(B) \bigcap \pi(C) = \emptyset$.*

Следствие 2.9.[29] *Вполне разложимая группа A вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых неизоморфных прямых слагаемых B и C ранга 1 группы A следует, что $\pi(B) \bigcap \pi(C) = \emptyset$.*

§3. Вполне транзитивность прямых произведений и прямых сумм s-обобщенно узких групп

В данном параграфе доказывается критерий вполне транзитивности прямых произведений s-обобщенно узких групп (теорема 3.1). С его помощью получается ряд эквивалентных условий вполне транзитивности прямых произведений обобщенно узких групп, сепарабельных групп, счетных групп, узких групп без кручения, периодических групп (следствия 3.2 – 3.4). Показывается также, что произвольная алгебраически компактная группа вполне транзитивна.

Как было отмечено в §1, условия вполне транзитивности, монотонности и конечности произвольной системы групп $\{G_i\}_{i\in I}$ являются только достаточными для вполне транзитивности группы $\prod\limits_{i\in I} G_i$. В данном параграфе будет введен класс групп такой, что эти условия, наложенные на произвольную систему групп из этого класса, будут также необходимыми для вполне транзитивности их прямого произведения.

Напомним следующее понятие, введенное С. В. Рычковым в [45].

Определение 3.1. [45] *Абелева группа A называется обобщенно узкой, если она не содержит неограниченных копериодических подгрупп и подгрупп, изоморфных группе $\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Z}$.*

Примерами обобщенно узких групп являются узкие группы, счетные редуцированные группы, редуцированные периодические группы [45].

Определение 3.2. *Группу G будем называть* **s**-*обобщенно узкой, если каждый элемент $g \in G$ такой, что $o(g) = \infty$, можно вложить в обобщенно узкое прямое слагаемое группы G.*

Класс **s**-обобщенно узких групп шире класса обобщенно узких групп, в частности, он содержит все сепарабельные редуцированные абелевы группы, в том числе и $\prod\limits_{\aleph_0}\mathbb{Z}$. Действительно, пусть A – сепарабельная редуцированная группа, покажем, что она – **s**-обобщенно узкая. Пусть $a \in A$, $o(g) = \infty$, тогда из сепарабельности группы A следует, что элемент a можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое B группы A, где $B = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i$, B_i $(i = \overline{1, n})$ – группы ранга 1. Так как каждая B_i – обобщенно узкая группа, то, как вытекает из [45, предложение 3], B – обобщенно узкая группа.

Перейдем к рассмотрению одного из основных результатов этого параграфа.

Теорема 3.1. *Группа* $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$, *где* G_i $(i \in I)$ – $\mathbf{s}$-*обобщенно узкие группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) $\{G_i\}_{i \in I}$ *– вполне транзитивная система групп;*
2) система групп $\{G_i\}_{i \in I}$ *удовлетворяет условию монотонности;*
3) система групп $\{G_i\}_{i \in I}$ *удовлетворяет условию конечности.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 1.5. Необходимость. Выполнение условий 1) – 2) следует из предложения 1.4. Покажем справедливость условия 3). Рассмотрим произвольную группу $G_j \in \{G_i\}_{i \in I}$ и произвольный элемент $g_j \in G_j$ такой, что $o(g_j) = \infty$ и $\mathbb{H}(g_j) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\tau)\}_{\tau \in J}$, $J \subseteq I$, и $|J| = \aleph_0$. Тогда $G = \prod\limits_{\tau \in J} G_\tau \oplus \prod\limits_{i \in I \setminus J} G_i$. Пусть $G^{(1)} = \prod\limits_{\tau \in J} G_\tau$ и $G^{(2)} = \prod\limits_{i \in I \setminus J} G_i$. Так как G – вполне транзитивная группа, то система $\{G^{(1)}, G^{(2)}\}$ вполне транзитивна. Возможны два случая: $j \in I \setminus J$ или $j \in J$. Пусть $j \in I \setminus J$ и $g^{(1)} = (\ldots, g_\tau, \ldots) \in G^{(1)}$, $g^{(2)} = (0, \ldots, 0, g_j, 0, \ldots) \in G^{(2)}$. Так как $\mathbb{H}(g^{(2)}) \geq \mathbb{H}(g^{(1)})$, то существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(G^{(1)}, G^{(2)})$ такой, что $\varphi(g^{(1)}) = g^{(2)}$. Тогда найдется гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(G^{(1)}, B_j)$ такой, что $\psi(g^{(1)}) = g_j$, где B_j – обобщенно узкое прямое слагаемое группы G_j, $\psi = \pi\pi_j\varphi$; $\pi_j : G^{(2)} \longrightarrow G_j$, $\pi : G_j \longrightarrow B_j$ – проекции. Так как B_j – обобщенно узкая группа, то существует, как следует из [45, предложение 1], такое натуральное число k, что $\psi(\prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau)$ – ограниченная группа. Представим группу $G^{(1)}$ в виде: $G^{(1)} = G_1 \oplus \ldots \oplus G_{k-1} \oplus \prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau$, тогда элемент $g^{(1)}$ запишется следующим образом: $g^{(1)} = g_1 + \ldots + g_{k-1} + \overline{g}$, где $g_t \in G_t$ $(t = \overline{1,\, k-1})$, $G_t \in \{G_\tau\}_{\tau=\overline{1,\infty}}$ и $\overline{g} \in \prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau$. Тогда элемент $g_j = \psi(g^{(1)}) = \psi(g_1 + \ldots + g_{k-1}) + \psi(\overline{g}) = g_{j_1} + g_{j_2}$, где $g_{j_1} = \psi(g_1 + \ldots + g_{k-1})$ и $g_{j_2} = \psi(\overline{g})$. Так как $g_{j_2} \in \psi(\prod\limits_{\tau=k}^{\infty} G_\tau)$, то $o(g_{j_2}) < \infty$. Из того, что $\mathbb{H}(g_{j_2}) \geq \mathbb{H}(\overline{g})$ и $o(g_{j_2}) < \infty$ следует существование конечной системы координат $\{g_{\tau_l}\}_{\tau_l=\overline{k,\infty};\, l=\overline{1,m}}$ элемента $\overline{g}$ такой, что $\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\tau_l})\}_{\tau_l=\overline{k,\infty};\, l=\overline{1,m}} \le \mathbb{H}(g_{j_2})$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(g_j) &\ge \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{j_1}),\, \mathbb{H}(g_{j_2})\} \\
&\ge \inf\{\inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_t)\}_{t=\overline{1,k-1}},\, \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\tau_l})\}_{\tau_l=\overline{k,\infty};\, l=\overline{1,m}}\} \\
&= \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{j_1}),\, \dots,\, \mathbb{H}(g_{k-1}),\, \mathbb{H}(g_{\tau_1}),\, \dots,\, \mathbb{H}(g_{\tau_m})\}.
\end{aligned}$$

Случай, когда $j \in J$ доказывается аналогично.

Непосредственно из этой теоремы получим следующие следствия.

Следствие 3.2. *Группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, где G_i $(i \in I)$ – обобщенно узкие группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для системы $\{G_i\}_{i\in I}$ выполняются условия 1) – 3) предыдущей теоремы.*

Следствие 3.3. *Если каждая группа G_i $(i \in I)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*
1) G_i – сепарабельная группа;
2) G_i – счетная группа;
3) G_i – узкая группа;
4) G_i – периодическая группа,
то группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются условия 1) – 3) теоремы 3.1.

Следствие 3.4. *Группа $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$, где G_i $(i \in I)$ – периодические группы, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются условия 1), 2) теоремы 3.1.*

Далее мы покажем, что критерий вполне транзитивности прямого произведения периодических групп можно упростить. Докажем предварительно следующую рабочую лемму.

Лемма 3.5. *Система периодических групп $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности для высотных матриц тогда и только тогда, когда для каждого простого числа p система $\{G_{ip}\}_{i\in I}$ (где G_{ip} – p-примарные компоненты группы G_i) удовлетворяет условию монотон-*

ности.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из определения монотонности системы. Докажем достаточность. Рассмотрим произвольную группу $G_j \in \{G_i\}_{i\in I}$ и произвольный элемент $g_j \in G_j$ такой, что $\mathbb{H}(g_j) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{i_k})\}_{i_k\in I,\, k=\overline{1,n}}$, причем $g_{i_l} \neq g_{i_t}$, если $i_l \neq i_t$. Пусть $\mathbb{H}(g_j) \ngeq \mathbb{H}(g_{i_k})$ для любого $k = \overline{1,\, n}$. Представим элементы g_j и $\{g_{i_k}\}_{k=\overline{1,n}}$ в виде суммы элементов, порядки которых есть степени различных простых чисел:

$$g_j = g_{j_1} + \ldots + g_{j_r} \text{ и } g_{i_k} = g_{i_k}^{(1)} + \ldots + g_{i_k}^{(m)}\; (k = \overline{1,\, n}).$$

Тогда

$$\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \geq \mathbb{H}(g_j) \geq \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{i_k})\}_{i_k\in I,\, k=\overline{1,\, n}} = \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{i_k}^{(\beta)})\}_{i_k\in I,\, k=\overline{1,\, n},\, \beta=\overline{1,\, m}}$$

для любого $\alpha = \overline{1,\, r}$. Рассмотрим элементы g_{j_α} $(\alpha = \overline{1,\, r})$ такие, что $\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \ngeq \mathbb{H}(g_{i_k}^{(\beta)})$ для любых $\beta = \overline{1,\, m}$ и $k = \overline{1,\, n}$ (если таких элементов нет, то условие монотонности тривиально выполняется). Тогда для каждого такого элемента g_{j_α} найдутся элементы

$$\{a_\tau^{(\alpha)}\}_{\tau=\overline{1,t}} \subseteq \{g_{i_k}^{(\beta)}\}_{i_k\in I,\, k=\overline{1,\, n},\, \beta=\overline{1,\, m}}\,,$$

порядки которых являются степенями такого же простого числа, что и порядок элемента g_{j_α}, причем $\mathbb{H}(g_{j_\alpha}) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_\tau^{(\alpha)})\}_{\tau=\overline{1,t}}$. Так как для каждого простого числа p система $\{G_{ip}\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию монотонности, то существуют элементы $b_{j_1}^{(\alpha)}, \ldots, b_{j_\gamma}^{(\alpha)}$ такие, что $b_{j_1}^{(\alpha)} + \ldots + b_{j_\gamma}^{(\alpha)} = g_{j_\alpha}$, причем для каждого элемента $b_{j_\delta}^{(\alpha)}$ $(\delta = \overline{1,\, \gamma})$ найдется элемент $a_\tau^{(\alpha)}$ $(\tau = \overline{1,\, t})$ такой, что $\mathbb{H}(b_{j_\delta}^{(\alpha)}) \geq \mathbb{H}(a_\tau^{(\alpha)})$. Тогда $\mathbb{H}(b_{j_\delta}^{(\alpha)}) \geq \mathbb{H}(g_{i_k})$ для некоторого $k = \overline{1,\, n}$, поскольку $a_\tau^{(\alpha)})$ является одним слагаемых в разложении элемента g_{i_k}. Далее, заменяя элементы g_{j_α} их разложением $b_{j_1}^{(\alpha)} + \ldots + b_{j_\gamma}^{(\alpha)}$, получим новое разложение элемента g_j, причем для каждого элемента c_{j_σ} из этого разложения найдется элемент g_{i_k} $(k = \overline{1,\, n})$ такой, что $\mathbb{H}(c_{j_\sigma}) \geq \mathbb{H}(g_{i_k})$.

Интерес представляет следующее предложение.

Предложение 3.6. *Любая система вполне транзитивных периодических групп удовлетворяет условию монотонности.*

Доказательство следует из леммы 3.5, [10, предложение 1] и теоремы 1.3.

Из предложения 3.6, следствия 3.4 и теоремы 1.3 вытекает

Следствие 3.7. *Следующие условия для периодических групп* G_i $(i \in I)$ *эквивалентны:*
1) $\prod\limits_{i\in I} G_i$ *– вполне транзитивная группа;*
2) $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ *– вполне транзитивная группа;*
3) $\{G_i\}_{i\in I}$ *– вполне транзитивная система групп.*

Следующий результат показывает, что если в периодической группе G выделено сепарабельное прямое слагаемое A, то вопрос о вполне транзитивности всей группы сводится к вопросу о вполне транзитивности дополнительного прямого слагаемого к A.

Предложение 3.8. *Периодическая группа* $G = A \oplus B$*, где* A *– сепарабельная группа, вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группа* B *вполне транзитивна.*

Доказательство. Применив теорему 1.3, получим необходимость. Согласно следствию 3.7 для доказательства достаточности осталось показать, что система $\{A, B\}$ вполне транзитивна или что для любого простого числа p система $\{A_p, B_p\}$ (где A_p, B_p – p-компоненты групп A и B соответственно) вполне транзитивна. Группы A_p, B_p вполне транзитивны, как прямые слагаемые вполне транзитивных групп. Поэтому покажем, что для любых элементов $a \in A_p$ и $b \in B_p$ таких, что $H_p(a) \le H_p(b)$ $(H_p(b) \le H_p(a))$ следует существование $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ $(\psi \in \mathrm{Hom}(B, A))$ такого, что $\varphi(a) = b$ $(\psi(b) = a)$. Пусть подгруппа $< b >$ не содержит элементов бесконечной p-высоты в B_p. Тогда элемент b можно вложить в конечное прямое слагаемое B'_p группы B_p [46, следствие 27.9]. Так как B'_p – сепарабельная группа, то $A_p \oplus B'_p$ также сепарабельна, а, значит, вполне транзитивна. Тогда, как вытекает из следствия 3.7, существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B'_p)$, отображающий элемент a в b, если

$H_p(a) \leq H_p(b)$. С другой стороны, будет существовать $\psi' \in \mathrm{Hom}(B'_p, A_p)$ такой, что $\psi'(b) = a$, если $H_p(b) \leq H_p(a)$, но тогда будет существовать и $\psi \in \mathrm{Hom}(B_p, A_p)$ такой, что $\psi(b) = a$, где $\psi = \psi'\pi$ и $\pi : B_p \longrightarrow B'_p$ – проекция. Пусть подгруппа $< b >$ содержит элементы бесконечной высоты, тогда $H_p(a) < H_p(b)$ – единственное возможное сравнение (высоты элементов берутся соответственно в A_p и B_p). Пусть δ_n – наименьшее бесконечное порядковое число в $H_p(b) = (\delta_0, \dots, \delta_k, \infty, \dots)$. Пусть $o(a) = p^t$ и $h_p(p^{t-1}a) = s$. Если $n = 0$, то из неограниченности группы B_p будет следовать существование в ней циклических прямых слагаемых сколь угодно большого порядка. Пусть F_p – такое слагаемое порядка не меньшего чем p^{t+s}, то есть пусть $|F_p| = p^{t+s+r}$, где $r \geq 0$ и f – образующий группы F_p. Тогда $H_p(a) \leq H_p(p^{s+r}f)$ и, как следует из предыдущего случая, существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$, отображающий элемент a в $p^{s+r}f$. Так как B_p – вполне транзитивная группа и $o(p^{s+r}f) \geq o(b)$, то найдется $\psi \in \mathrm{E}(B_p)$ такой, что $\psi(p^{s+r}f) = b$. Тогда $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$ отобразит элемент a в элемент b. Пусть $n \neq 0$, тогда для всех порядковых чисел δ_i $(0 \leq i < n)$, после которых есть скачки, δ_i-ые инварианты Ульма-Капланского будут отличны от нуля [47, лемма 65.3]. Следовательно, возрастающая последовательность $(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}, \infty, \dots)$ будет индикатором некоторого элемента $b'_p \in B_p$. Так как группа $< b'_p >$ не содержит элементы бесконечной высоты, то элемент b'_p можно вложить в конечное прямое слагаемое B'_p группы B_p. Пусть $B_p = B'_p \oplus B''_p$. Так как B''_p – неограниченная группа, то она содержит циклические прямые слагаемые сколь угодно больших порядков. Значит, в B''_p существует циклическое прямое слагаемое C_p порядка не меньшего чем p^{t+s}, то есть $|C_p| = p^{t+s+r}$ $(r \geq 0)$ и $c \in C_p$ – ее образующий. Тогда $H_p(a) < H_p(b' + p^{s+r}c) < H_p(b)$. Так как $A_p \oplus B'_p \oplus C_p$ является сепарабельным прямым слагаемым группы G, то, как вытекает из следствия 3.7, существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B'_p \oplus C_p)$ такой, что $\varphi(a) = b' + p^{s+r}c$. В то же время, из вполне транзитивности группы B_p следует существование $\psi \in \mathrm{E}(B_p)$ такого, что $(\psi\varphi)(a) = b$, где $\psi\varphi \in \mathrm{Hom}(A_p, B_p)$.

Некоторые примеры вполне транзитивных (не обязательно периодических) групп дает следующее следствие, в котором под сепарабельной (тотально проективной) периодической группой понимаем периодическую группу, у которой каждая p-компонента – сепарабельная (тотально проективная) группа.

Следствие 3.9. *Если каждая из редуцированных периодических групп $G_i\,(i \in I)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*
1) G_i – сепарабельная группа;
2) G_i – тотально проективная группа,
то $\prod\limits_{i\in I} G_i$ и $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ – вполне транзитивные группы.

Доказательство. Согласно лемме 3.5 можно считать, что каждая группа $G_i\,(i \in I)$ – p-группа. Покажем, что $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ – вполне транзитивная группа. Пусть $I_1 = \{i \in I \,|\, G_i -$ сепарабельная группа$\}$, тогда $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i = \bigoplus\limits_{i\in I_1} G_i \oplus \bigoplus\limits_{i\in I\setminus I_1} G_i$. Заметим, что $\bigoplus\limits_{i\in I_1} G_i$ – сепарабельная группа ($\bigoplus\limits_{i\in I\setminus I_1} G_i$ – тотально проективная группа), как прямая сумма сепарабельных (тотально проективных групп) [47, стр.122, теорема 83.5]. Поскольку каждая тотально проективная p-группа вполне транзитивна [14], то $\bigoplus\limits_{i\in I\setminus I_1} G_i$ – вполне транзитивная группа. Воспользовавшись предложением 3.8, получим, что группа $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ вполне транзитивна. Следствие 3.7 дает возможность утверждать, что и $\prod\limits_{i\in I} G_i$ – вполне транзитивная группа.

Следствие 3.10. *Алгебраически компактная группа вполне транзитивна.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.3, следствия 3.8 и [46, следствие 38.2].

§4. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп, системы множителей которых удовлетворяют условию конечности

В данном параграфе получаются более простые критерии вполне транзитивности расщепляемых смешанных групп, вполне транзитивности прямого произведения сепарабельных групп. Выясняются вопросы о влиянии вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения **s**-обобщенно узких групп, на сепарабельность прямого произведения групп.

Докажем следующее простое утверждение.

Лемма 4.1. *Если в группе G существует элемент a порядка p^n, $n \in \mathbb{N}$ и обобщенной p-высоты большей или равной m (где m – неотрицательное целое число), то в ней есть циклическое прямое слагаемое порядка не меньшего, чем p^{n+m}.*

Доказательство. Пусть в группе G существует элемент a, удовлетворяющий условию леммы. Пусть $T_p(G)$ – p-компонента периодической части группы G. Если $T_p(G)$ является неограниченной группой, то из [46, стр.142] следует, что она содержит циклическое прямое слагаемое сколь угодно большого порядка, которое, будучи ограниченной сервантной подгруппой группы G, выделяется в ней прямым слагаемым. Если $T_p(G)$ – ограниченная группа, то пусть $h_p^*(a) = k \geq m$. Тогда, как следует из [41], элемент $p^{n-1}a$ можно вложить в циклическое прямое слагаемое B порядка $p^{n+k} \geq p^{n+m}$.

Лемма 4.2. *Пусть A – группа без кручения и $\prod\limits_{i \in I} G_i$ – вполне транзитивная группа, где $G_i \, (i \in I)$ – периодические группы, тогда для любых элементов $a \in A$ и $g \in G$ таких, что $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(g)$ существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,\, G)$, переводящий a в g.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $g \in G$ удовлетворяют условию леммы и $g = (\dots, g_i, \dots)$, где $g_i \in G_i$. Так как $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(g_i)$ для любого $i \in I$, то нам достаточно показать, что для произвольной координаты g_i, $(i \in I)$ существует $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(A,\, G_i)$ такой, что $\varphi_i(a) = g_i$. Тогда, как следует из [46, теорема 8.2], будет существовать $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,\, G)$ такой, что $\varphi(a) = g$. Рассмотрим произвольную координату $g_i \in G_i$ и обозначим ее через b, а группу G_i через B. Зафиксируем множество простых чисел $p_1, \dots, p_k$, для которых $h_{p_i}^*(b) \neq \infty$ и пусть $h_{p_i}(a) = n_i$ $(i = \overline{1,\, k})$. Так как элемент b можно представить в виде $b = b_1 + \ldots + b_k$, где $B_i \, (i = \overline{1,\, k})$ – p_i-компоненты группы B и $b_i \in B_i$, то для любого элемента b_i, у которого $o(b_i) = p_i^{m_i}$ и $h_{p_i}^*(b_i) \geq n_i$, найдется циклическое прямое слагаемое C_i такое, что $|C_i| \geq p_i^{m_i+n_i}$ (лемма 4.1). Пусть c_i – один из образующих группы $C_i \, (i = \overline{1,\, k})$, тогда $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(p_i^{n_i} c_i) \leq \mathbb{H}(b_i)$, а значит, $\mathbb{H}(a) < \mathbb{H}(p_1^{n_1} c_1 + \ldots + p_k^{n_k} c_k) \leq \mathbb{H}(b)$. Так как в группе $< a >_*$ разрешимы уравнения $p_i^{n_i} x = a$ $(i = \overline{1,\, k})$, то пусть $x_i \, (i = \overline{1,\, k})$ – решения этих уравнений и, следовательно, $h_{p_i}(x_i) = 0$. Построим гомоморфизмы $\psi_i :< a >_* \longrightarrow C_i \ (i = \overline{1,\, k})$ такие, что $\psi_i(x_i) = c_i$. Так как $< a >_*$ – группа ранга 1, то для произвольного $d \in < a >_*$ существуют целые числа m и n такие, что $mx_i = nd$ и $(m,\, n) = 1$. Учитывая, что x_i в группе $< a >_*$ имеет нулевую высоту по простому числу p_i, получим $(n,\, p_i) = 1$. Полагаем теперь $\psi_i(d) = \frac{m}{n}\, c_i$. Легко проверить, что отображение $\psi_i \ (i = \overline{1,\, k})$ является гомоморфизмом. Заметим также, что гомоморфизм $\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_k$ отобразит элемент a в элемент $p_1^{n_1}c_1 + \ldots + p_k^{n_k}c_k$. Так как $C = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} C_i$ – алгебраически компактная группа и, следовательно, сервантно инъективная, то найдется гомоморфизм $\alpha \in \mathrm{Hom}(A,\, C)$ такой, что $\alpha i = \psi$, где $i :< a >_* \longrightarrow A$ – вложение, причем $\alpha(a) = p_1^{n_1}c_1 + \ldots + p_k^{n_k}c_k$. Так как $\mathbb{H}(p_1^{n_1}c_1 + \ldots + p_k^{n_k}c_k) \leq \mathbb{H}(b)$ и B – вполне транзитивная группа, то найдется $\eta \in \mathrm{E}\,(B)$ такой, что $\eta(p_1^{n_1}c_1 + \ldots + p_k^{n_k}c_k) = b$. Тогда гомоморфизм $\eta\alpha \in \mathrm{Hom}(A,\, B)$ будет переводить элемент a в элемент b.

Предложение 4.3. *Пусть система* $\{G_i\}_{i \in I}$ *удовлетворяет условию конечности для высотных матриц. Если для простого числа* p *существует элемент* $g_j \in G_j \ (j \in I)$ *такой, что* $o(g_j) = \infty$ *и* $h_p^*(p^k g_j) \neq \infty$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$, *то* $T_p(\prod\limits_{i \in I} G_i) = \prod\limits_{i \in I} T_p(G_i)$.

Доказательство. Легко показывается, что

$$T_p(\prod_{i \in I} G_i) = T_p(\prod_{i \in I} T_p(G_i)) \qquad (*)$$

для любого простого числа p. Пусть выполняется условие предложения, то есть существует элемент $g_j \in G_j \ (j \in I)$ такой, что $o(g_j) = \infty$ и $h_p^*(p^k g_j) \neq \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и некоторого простого числа p. Из равенства $(*)$ следует, что $T_p(\prod\limits_{i \in I} G_i) \subseteq \prod\limits_{i \in I} T_p(G_i)$. Осталось показать, что $\prod\limits_{i \in I} T_p(G_i)$ – периодическая группа. Допустим противное, то есть пусть существует элемент $a \in \prod\limits_{i \in I} T_p(G_i)$, имеющий бесконечный порядок. Тогда найдутся такие координаты a_α элемента a такие, что

$$\mathbb{H}(a) = \inf{}_{\mathfrak{M}} \{\mathbb{H}(a_\alpha)\}_{\alpha \in J,\, J \subseteq I,\, |J| = \aleph_0}\,.$$

Как следует из леммы 4.1, для любой координаты $a_\alpha \, (\alpha \in J)$ элемента a такой, что $o(a_\alpha) = p^{k(\alpha)}$ найдется циклическое прямое слагаемое

$B_\alpha \subseteq T_p(G_\alpha)$, у которого $|B_\alpha| \geq p^{k(\alpha)}$. Пусть b_α – один из образующих группы $B_\alpha\,(\alpha \in J)$, тогда $\inf\{H_p(b_\alpha)\}_{\alpha\in J} = (0,\,1,\,2,\,\ldots)$. Так как $\mathbb{H}(g_j) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(pg_j),\,\mathbb{H}(b_\alpha)\}_{\alpha\in J}$, то из того, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности следует существование конечной подсистемы $\{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,\,n}} \subset \{pg_j,\,b_\alpha\}_{\alpha\in J}$ такой, что $\mathbb{H}(g_j) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n}}$. Если $pg_j \notin \{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,\,n}}$, то предыдущее неравенство невозможно. Действительно, в группе $\prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$ существует элемент b' такой, что все его ненулевые координаты являются элементами $c_\tau\;(\tau = \overline{1,\,n})$. Так как элемент b' имеет конечный порядок и $\mathbb{H}(b') = \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n}}$, то

$$\mathbb{H}(g_j) \not\geq \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n}}\,.$$

Пусть $pg_j \in \{c_\tau\}_{\tau=\overline{1,\,n}}$ и $pg_j = c_n$. Так как все элементы $c_\tau\;(\tau = \overline{1,\,n-1})$ имеют конечный порядок, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $p^m = \max\{o(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n-1}}$. Тогда $H_p(p^l g_j) < \inf\{H_p(p^l c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n}} = H_p(p^{l+1}g_j)$ для любого $l \geq m$. Следовательно, $\mathbb{H}(g_j) \not\geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_\tau)\}_{\tau=\overline{1,\,n}}$.

Следствие 4.4. *Пусть система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности для высотных матриц. Если для некоторого $j \in I$ существует A_j – прямое слагаемое без кручения группы G_j, то для любого $p \in \pi(A_j)$ следует, что $T_p(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$.*

Лемма 4.5. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности и $\mathfrak{A} = I \cup J$, причем выполняются следующие условия:*
1) $G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, если $\alpha \in I \cap J$;
2) $G_\alpha = A_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$;
3) $G_\alpha = B_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,
где $0 \neq A_\alpha$ – группа без кручения, $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Если $\prod\limits_{j\in J} B_j$ – вполне транзитивная группа, то система $\{\prod\limits_{i\in I} A_i,\, \prod\limits_{j\in J} B_j\}$ удовлетворяет условию монотонности.

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ и $B = \prod\limits_{j\in J} B_j$. Рассмотрим первый случай. Пусть $a,\,c \in A$, $b \in B$ и $\mathbb{H}(a) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c),\,\mathbb{H}(b)\}$. Тогда, как вытекает из следствия 4.4, для каждого простого числа p такого, что $pA \neq A$ следует существование $n \in \mathbb{N}$ такого, что $p^n b = 0$. Следовательно, $H_p(p^n a) \geq \inf\{H_p(p^n c),\, H_p(p^n b)\} = H_p(p^n c)$, откуда $\mathbb{H}(a) \geq \mathbb{H}(c)$. Рассмотрим второй случай. Пусть $a \in A$, b, $c \in B$ и $\mathbb{H}(b) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$, причем $\mathbb{H}(b) \ngeq \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(b) \ngeq \mathbb{H}(c)$.

Пусть 1) $o(b) < \infty$, $o(c) < \infty$ и $b = b_{p_1} + \ldots + b_{p_k}$, где $b_{p_\tau} \in B_{p_\tau}$ и B_{p_τ} ($\tau = \overline{1, k}$) – p-компоненты периодической части группы B. Рассмотрим все такие элементы $b_q \in B_q$, что $q \in \{p_\tau\}_{\tau=\overline{1,k}}$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeq \mathbb{H}(a)$, $\mathbb{H}(b_q) \ngeq \mathbb{H}(c)$. Так как $\mathbb{H}(b_q) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeq \mathbb{H}(a)$, $\mathbb{H}(b_q) \ngeq \mathbb{H}(c)$, то 1') $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$ и 2') $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$. Покажем, что выполняется 1'). Действительно, так как $o(a) = \infty$, $o(b_q) < \infty$ и $\mathbb{H}(b_q) \ngeq \mathbb{H}(a)$, то $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$. Покажем, что справедливо условие 2'). Так как $o(a) = \infty$, $o(c) < \infty$, $h_q(a) \neq \infty$ и $h_q(c) \neq \infty$, то возможны только два варианта: $H_q(a) < H_q(c)$ или $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$. Допустим, что $H_q(a) < H_q(c)$, тогда $\inf\{H_q(a), H_q(c)\} = H_q(a) \leq H_q(b_q)$, что противоречит 1'). Пусть

$$H_q(b_q) = (\delta_0^{(q)}, \ldots, \delta_{m(q)}^{(q)}, \infty, \ldots), \tag{$**$}$$

$H_q(a) = (n_0^{(q)}, n_1^{(q)}, \ldots)$, $H_q(c) = (\sigma_0^{(q)}, \ldots, \sigma_{\nu(q)}^{(q)}, \infty, \ldots)$ для каждого q. Так как $\mathbb{H}(b_q) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$ и $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$; $H_q(a) \gtreqless H_q(c)$, то $h_q(a) > h_q^*(b_q) \geq h_q^*(c)$ (то есть $n_0^{(q)} > \delta_0^{(q)} \geq \sigma_0^{(q)}$). Так как $H_q(b_q) \gtreqless H_q(a)$, то существует наименьшее целое неотрицательное число $r(q)$ такое, что $n_{r(q)}^{(q)} > \delta_{r(q)}^{(q)} \geq \sigma_{r(q)}^{(q)}$, но уже $\delta_{r(q)+1}^{(q)} \geq n_{r(q)+1}^{(q)}$, причем $\delta_{r(q)+1}^{(q)} \neq \infty$ (если предположить, что $\delta_{r(q)+1}^{(q)} = \infty$, то $\mathbb{H}(b_q) \geq \mathbb{H}(c)$, что невозможно). Покажем, что между $\delta_{r(q)}^{(q)}$ и $\delta_{r(q)+1}^{(q)}$ есть скачок. Действительно, так как $\delta_{r(q)}^{(q)} < n_{r(q)}^{(q)}$, то $\delta_{r(q)}^{(q)} + 1 < n_{r(q)}^{(q)} + 1 = n_{r(q)+1}^{(q)} \leq \delta_{r(q)+1}^{(q)}$. Так как в индикаторе $H_q(b_q)$ каждый $\delta_\gamma^{(q)}$-ый инвариант Ульма-Капланского группы B_q отличен от нуля, если между $\delta_\gamma^{(q)}$ и $\delta_{\gamma+1}^{(q)}$ есть скачок, то, как вытекает из [47, лемма 65.3], последовательность ($**$) будет индикатором некоторого элемента $d_q \in B_q$. С другой стороны, так как элемент $q^{m(q)} b_q$ имеет порядок q и высоту большую или равную $n_{m(q)}^{(q)}$, то по лемме 4.1 следует существование в группе B_q циклического прямого слагаемого F_q порядка не меньшего чем $q^{n_{m(q)}^{(q)}+1}$. Так как $n_{m(q)}^{(q)} = n_0^{(q)} + m(q)$, то $q^{n_{m(q)}^{(q)}+1} = q^{n_0^{(q)}+m(q)+1}$. Пусть f_q – один из образующих группы F_q. Тогда элемент $q^{n_0^{(q)}} f_q$ будет иметь индикатор $H_q(q^{n_0^{(q)}} f_q) = (n_0^{(q)}, \ldots, n_\lambda^{(q)}, \infty, \ldots)$, где $\lambda \geq m(q)$.

Итак мы получили, что $H_q(d_q) > H_q(c)$ и $H_q(q^{n_0^{(q)}} f_q) > H_q(a)$, откуда $\mathbb{H}(d_q) > \mathbb{H}(c)$ и $\mathbb{H}(q^{n_0^{(q)}} f_q) > \mathbb{H}(a)$. С другой стороны, так как $h_q(q^\alpha d_q) < h_q(q^{\alpha+n_0^{(q)}} f_q)$ для любого $0 \leq \alpha \leq r(q)$, а $h_q(q^\alpha d_q) > h_q(q^{\alpha+n_0^{(q)}} f_q)$ для всех

$\alpha > r(q)$, то $H_q(d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q) = \inf\{H_q(d_q), H_q(q^{n_0^{(q)}} f_q)\}$, причем $\mathbb{H}(d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q) \leq \mathbb{H}(b_q)$, как видно из построения элемента $d_q + q^{n_0^{(q)}} f_q$. Так как B_q – вполне транзитивная группа, то существует $\varphi_q \in \mathrm{E}\,(B_q)$ такой, что $\varphi_q(d_q) + \varphi_q(q^{n_0^{(q)}} f_q) = b_q$, откуда $\mathbb{H}(\varphi_q(d_q)) > \mathbb{H}(c)$, $\mathbb{H}(\varphi_q(q^{n_0^{(q)}} f_q)) > \mathbb{H}(a)$. Далее, заменяя в равенстве $b = b_{p_1} + \ldots + b_{p_k}$ все элементы b_q со свойством $\mathbb{H}(b_q) \not\geq \mathbb{H}(a)$ и $\mathbb{H}(b_q) \not\geq \mathbb{H}(c)$ их разложениями, приведенными выше, получим, что $b = b'_1 + \ldots + b'_n$, где $n \geq k$. Таким образом, для любого $\beta = \overline{1,\, n}$ найдется элемент $v \in \{a,\, c\}$ такой, что $\mathbb{H}(b'_\beta) \geq \mathbb{H}(v)$.

2) Пусть $o(b) < \infty$, $o(c) = \infty$ и $\{c_j\}_{j \in J}$, $\{a_i\}_{i \in I}$ – координаты элементов c и a соответственно. Так как $\mathbb{H}(b) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a), \mathbb{H}(c)\}$, то $\mathbb{H}(b) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_i), \mathbb{H}(c_j)\}_{i \in I,\, j \in J}$. Из того, что $o(b) < \infty$, следует существование конечного числа элементов $\{c_{j_k},\, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,\, r},\, l=\overline{1,\, t}}$ таких, что

$$\mathbb{H}(b) \geq \inf{}_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(a_{i_l}),\, \mathbb{H}(c_{j_k})\}_{k=\overline{1,\, r},\, l=\overline{1,\, t}},$$

где $\{c_{j_k},\, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,\, r},\, l=\overline{1,\, t}} \subset \{c_j\}_{j \in J} \cup \{a_i\}_{i \in I}$. Причем множество $\{c_{j_k},\, a_{i_l}\}_{k=\overline{1,\, r},\, l=\overline{1,\, t}}$ не может состоять только из элементов c_{j_k} $(k = \overline{1,\, r})$ или только из элементов a_{i_l} $(l = \overline{1,\, t})$. Действительно, если $a_{i_l} = 0$ для любого $l = \overline{1,\, t}$, то $\mathbb{H}(b) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_{j_k})\}_{k=\overline{1,\, r}} \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(c_j)\}_{j \in J} = \mathbb{H}(c)$, что невозможно, так как по условию $\mathbb{H}(b) \not\geq \mathbb{H}(c)$. Аналогично проверяется условие, при котором $c_{j_k} = 0$ для любого $k = \overline{1,\, r}$. Пусть $\rho_{j_k} : B_{j_k} \longrightarrow B\,(k = \overline{1,\, r})$ и $\rho_{i_l} : A_{i_l} \longrightarrow A\,(l = \overline{1,\, t})$ – вложения, тогда $\mathbb{H}(b) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k})),\, \mathbb{H}(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \ldots + \rho_{i_t}(a_{i_t}))\}$. Так как элемент $\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k})$ имеет конечный порядок, то, как вытекает из случая 1), существует конечное число элементов $b_1, \ldots, b_m \in B$ такие, что $b = b_1 + \ldots + b_m$, причем для каждого элемента b_β $(\beta = \overline{1,\, m})$, должно выполняться хотя бы одно из двух неравенств: $\mathbb{H}(b_\beta) \geq \mathbb{H}(\rho_{j_1}(c_{j_1}) + \ldots + \rho_{j_k}(c_{j_k}))$ или $\mathbb{H}(b_j) > \mathbb{H}(\rho_{i_1}(a_{i_1}) + \ldots + \rho_{i_t}(a_{i_t}))$. Тогда для каждого $\beta = \overline{1,\, m}$ должно выполняться хотя бы одно из двух неравенств $\mathbb{H}(b_\beta) \geq \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}(b_\beta) > \mathbb{H}(a)$.

3) Пусть $o(b) = \infty$, $o(c) = \infty$, тогда среди координат $\{b_j\}_{j \in J}$ элемента b выберем только такие, для которых $\mathbb{H}(b_j) \not\geq \mathbb{H}(c)$ (такие существуют, в противном случае $\mathbb{H}(b) \geq \mathbb{H}(c)$, что противоречило бы предположению $\mathbb{H}(b) \not\geq \mathbb{H}(c)$). Так как $o(b_j) < \infty$ для любого $j \in J$, то, как следует из случаев 1) и 2), существуют элементы $\{b_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,\, r}}$, $b_k^{(j)} \in B$ такие, что $\rho_j(b_j) = b_1^{(j)} + \ldots + b_r^{(j)}$, где $\rho_j : B_j \longrightarrow B$ – вложение, причем для любого $k = \overline{1,\, r}$ должно выполняться хотя бы одно из двух нера-

венств: $\mathbb{H}(b_k^{(j)}) > \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}(b_k^{(j)}) > \mathbb{H}(a)$. Пусть $\pi_j : B \longrightarrow B_j$ – проекция, тогда $b_j = \pi_j(b_1^{(j)}) + \ldots + \pi_j(b_r^{(j)})$, причем $\mathbb{H}(\pi_j(b_k^{(j)})) > \mathbb{H}(c)$ или $\mathbb{H}(\pi_j(b_k^{(j)})) > \mathbb{H}(a)$ для любого $k = \overline{1,\, r}$. Тогда каждый элемент b_j можно представить в виде: $b_j = b_{j_1} + b_{j_2}$, где b_{j_1} равен сумме элементов $\pi_j(b_k^{(j)})$ таких, что $\mathbb{H}(\pi_j(b_k^{(j)})) > \mathbb{H}(c)$, а b_{j_2} – сумме элементов $\pi_j(b_k^{(j)})$, для которых $\mathbb{H}(\pi_j(b_k^{(j)})) \not> \mathbb{H}(c)$. Откуда получаем, что $\mathbb{H}(b_{j_1}) > \mathbb{H}(c)$, а $\mathbb{H}(b_{j_2}) > \mathbb{H}(a)$. Тогда $b = (\ldots, b_{j_1} + b_{j_2}, \ldots)$, причем для некоторых $b_j \neq 0$ может выполняться, что $b_{j_1} = 0$ или $b_{j_2} = 0$. Следовательно, элемент b можно записать в виде $b = b_1 + b_2$, где $b_1 = (\ldots, b_{j_1}, \ldots)$, а $b_2 = (\ldots, b_{j_2}, \ldots)$. Из чего получаем, что $\mathbb{H}(b_1) \geq \mathbb{H}(c)$, а $\mathbb{H}(b_2) > \mathbb{H}(a)$.

Теорема 4.6. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности и $\mathfrak{A} = I \cup J$, причем выполняются следующие условия:*
1) $G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, если $\alpha \in I \cap J$;
2) $G_\alpha = A_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$;
3) $G_\alpha = B_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,
где $0 \neq A_\alpha$ – группа без кручения, $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Группа $G = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} G_\alpha$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группы $\prod\limits_{i \in I} A_i$ и $\prod\limits_{j \in J} B_j$ вполне транзитивны.

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ и $B = \prod\limits_{j \in J} B_j$, тогда, как следует из теоремы 1.3, эти группы вполне транзитивны. Обратно. Покажем, что система групп $\{A,\, B\}$ вполне транзитивна. Так как система $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности, то, как вытекает из следствия 4.4, $T_p(B) = \prod\limits_{j \in J} B_{j_p}$ для любого простого числа $p \in \pi(A)$, где B_{j_p} $(j \in J)$ – p-компонента группы B_j. Тогда для каждого простого числа $p \in \pi(A)$ следует, что $H_p(b) \nleq H_p(a)$, откуда $\mathbb{H}(b) \nleq \mathbb{H}(a)$, то есть возможно только такое неравенство: $\mathbb{H}(b) > \mathbb{H}(a)$. По лемме 4.2 существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,\, B)$ такой, что $\varphi(a) = b$. Условие монотонности системы $\{A,\, B\}$ следует из леммы 4.5.

Непосредственно из этой теоремы для класса расщепляемых групп получаем такой результат.

Следствие 4.7. *Пусть система $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ расщепляемых групп удов-*

летворяет условию конечности. Группа $G = \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда группы* $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} T(G_\alpha)$ *и* $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} (G_\alpha \,/\, T(G_\alpha))$ *вполне транзитивны.*

Следствие 4.8. *Расщепляемая группа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда ее периодическая часть и часть без кручения вполне транзитивны.*

Некоторые классы вполне транзитивных расщепляемых групп выделяются в следующем следствии.

Следствие 4.9. *Пусть* $G = A \oplus B$, *где* $B = T(G)$. *Если группы* A *и* B *удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:*
1) A *– сепарабельная группа такая, что для любых неизоморфных прямых слагаемых* C *и* K *ранга 1 группы* A *следует, что* $\pi(C) \cap \pi(K) = \emptyset$;
2) A *– алгебраически компактная группа;*
3) B *– сепарабельная группа;*
4) B *– тотально проективная группа;*
5) B *– прямая сумма сепарабельной и тотально проективной групп, то* G *– вполне транзитивная группа.*

Доказательство. Вполне транзитивность групп из 1), 2) и 5) вытекает соответственно из теоремы 2.4, следствия 3.9 и следствия 3.8; вполне транзитивность групп из 3) и 4) получаем из [47].

Напомним, что подгруппу H группы G называют *поглощающей* в G [25], если $T(G/H) = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая поглощающая подгруппа выделяется прямым слагаемым.

Следствие 4.10. *Группа* $G \in \mathfrak{B}$ *вполне транзитивна тогда и только, тогда когда* $T(G)$ *вполне транзитивна.*

Доказательство. Из [25] и [26] следует, что $G = T(G) \oplus F$, где F – прямая сумма конечного числа изоморфных между собой групп без кручения ранга 1; остается применить следствие 4.8 и теорему 2.4.

Следующие следствия будут интересны с точки зрения примеров классов вполне транзитивных групп.

Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая изотипная (сервантная) подгруппа выделяется прямым слагаемым.

Следствие 4.11. *Класс $\mathfrak{C}$ состоит из вполне транзитивных групп.*

Доказательство. Как следует из [2, теорема 2] произвольная группа $G \in \mathfrak{C}$ имеет вид: $G = T(G) \oplus F$, где каждая p-компонента $T(G)$ ограничена, а группа F – прямая сумма конечного числа, изоморфных между собой групп ранга 1. Применяя следствие 4.9, получим вполне транзитивность группы G.

Напомним, что подгруппу B называют *сбалансированной* в группе A [27], если каждый смежный класс $a + B$ содержит элемент x такой, что $\mathbb{H}_A(x) = \mathbb{H}_{A/B}(a + B)$ и $o(x) = o(a + B)$.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ класс всех редуцированных групп, в которых каждая сервантная подгруппа является сбалансированной.

Следствие 4.12. *Класс $\mathfrak{S}$ состоит из вполне транзитивных групп.*

Доказательство. Так как каждая группа из класса $\mathfrak{S}$, как следует из [27, предложение 4.8], имеет вид: $G = A \oplus B$, где B – периодическая группа, в которой каждая p-компонента ограничена, и A – однородная вполне разложимая группа без кручения конечного ранга, то вполне транзитивность группы G будет следовать из следствия 4.9.

Теорема 4.13. *Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – система $\mathbf{s}$-обобщенно узких групп и $\mathfrak{A} = I \cup J$, причем выполняются следующие условия:*
1) $G_\alpha = A_\alpha \oplus B_\alpha$, если $\alpha \in I \cap J$;
2) $G_\alpha = A_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus J$;
3) $G_\alpha = B_\alpha$, если $\alpha \in \mathfrak{A} \setminus I$,
где $0 \neq A_\alpha$ – группа без кручения, $0 \neq B_\alpha = T(G_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Группа $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$ вполне транзитивна тогда и только тогда, когда вы-

полняются следующие условия:

1) $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ *– вполне транзитивная группа;*

2) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *– вполне транзитивная система;*

3) если $p \in \pi(\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha)$*, то* $T_p(\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha) = \prod\limits_{\alpha\in J} T_p(G_\alpha)$.

Доказательство. Из условия теоремы получаем, что $G = \prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha = \prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha \oplus \prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha$. Из вполне транзитивности группы G следует вполне транзитивность групп $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ и $\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha$ (теорема 1.3). Из предложения 1.4 вытекает, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ вполне транзитивна. Поскольку $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ – система $\mathbf{s}$-обобщенно узких групп и G – вполне транзитивная группа, то, как следует из теоремы 3.1, система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. По следствию 4.4 выполняется условие 3). Обратно. Из следствия 3.7 вытекает, что группа $\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha$ вполне транзитивна. Покажем, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. Рассмотрим произвольную группу без кручения $A_i \in \{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ и произвольный элемент $a_i \in A_i$ такой, что $\mathbb{H}(a_i) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\alpha)\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'}$, где $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и $|\mathfrak{A}'| = \aleph_0$. Рассмотрим все такие простые числа p, что $h_p(a_i) \neq \infty$ в группе A_i, тогда $T_p(\prod\limits_{\alpha\in J} G_\alpha) = \prod\limits_{\alpha\in J} T_p(G_\alpha)$ и для каждого такого простого числа p будет существовать $m(p) \in \mathbb{N}$ такой, что $h_p(p^{m(p)}a_i) \geq h_p(p^{m(p)}g_\alpha^{(p)})$ для некоторого элемента бесконечного порядка $g_\alpha^{(p)} \in \{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'}$. Тогда $H_p(a_i) \geq H_p(g_\alpha^{(p)})$ для всех таких p и всех таких элементов $g_\alpha^{(p)}$. Откуда следует, что $\mathbb{H}(a_i) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_\alpha^{(p)})\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$. Так как система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ состоит из $\mathbf{s}$-обобщенно узких групп и так как $\prod\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ – вполне транзитивная группа, то система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ по теореме 3.1 удовлетворяет условию конечности. Тогда ее подсистема $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$ также удовлетворяет условию конечности. Следовательно, среди элементов $\{g_\alpha^{(p)})\}_{\alpha\in\mathfrak{A}'\cap I}$ найдется конечная подсистема элементов $\{g_{\alpha r}^{(p)}\}_{r=\overline{1,n}}$, такая, что $\mathbb{H}(a_i) \geq \inf_{\mathfrak{M}}\{\mathbb{H}(g_{\alpha r}^{(p)})\}_{r=\overline{1,n}}$. Таким образом показано, что система $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ удовлетворяет условию конечности. Значит, по теореме 4.6 группа G вполне транзитивна.

Если $\mathbf{s}$-обобщенно узкие группы $G_i\,(i \in I)$ являются смешанными сепарабельными группами [22], то условия 1) – 3) теоремы 3.1 можно заменить более наглядными.

Теорема 4.14. *Пусть* $\{G_i\}_{i\in I}$ *– семейство сепарабельных групп. Группа* $\prod\limits_{i\in I} G_i$ *вполне транзитивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) если для простого числа p *найдется прямое слагаемое без кручения* C *из* G *такое, что* $pC \neq C$*, то* $T_p(G) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$*;*
2) для любых неизоморфных прямых слагаемых A *и* B *ранга без кручения 1 из* G *следует, что* $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$*.*

Доказательство. Так как сепарабельные группы являются $\mathbf{s}$-обобщенно узкими, то из теоремы 3.1 следует, что система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности. Тогда по теореме 4.3 получаем выполнение условия 1). Справедливость условия 2) вытекает из лемм 2.2 и 2.1. Обратно. Пусть a, $b \in G$ и $\mathbb{H}(a) \leq \mathbb{H}(b)$, где $a = (\dots, a_i, \dots)$, $b = (\dots, b_i, \dots)$. Так как для каждого $i \in I$ элементы a_i, $b_i \in G_i$ можно вложить во вполне разложимое прямое слагаемое G'_i группы G_i, то есть $G'_i = A_i \oplus B_i$, где A_i – вполне разложимая группа без кручения конечного ранга, а B_i – прямая сумма конечного числа циклических p-групп, то элементы a и b будут принадлежать прямому слагаемому $G' = \prod\limits_{i\in I} A_i \oplus \prod\limits_{i\in I} B_i$ группы G. Поэтому для доказательства существования $\varphi \in \mathrm{E}\,(G)$ такого, что $\varphi(a) = b$, достаточно показать, что G' – вполне транзитивная группа. Как следует из предыдущей теоремы, для вполне транзитивности группы G' достаточно заметить, что $\prod\limits_{i\in I} A_i$ – вполне транзитивная группа и $\{B_i\}_{i\in I}$ – вполне транзитивная система. Вполне транзитивность последней следует из следствий 3.9 и 3.7. Вполне транзитивность $\prod\limits_{i\in I} A_i$ показывается в следствии 2.7.

Следствие 4.15. *Сепарабельная абелева группа вполне транзитивна тогда и только тогда, когда для любых ее неизоморфных прямых слагаемых* A *и* B *ранга без кручения 1 имеем, что* $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$*.*

Далее будет исследовано влияние свойства вполне транзитивности на расщепляемость прямого произведения $\mathbf{s}$-обобщенно узких групп.

Поскольку смешанная группа расщепляется тогда и только тогда, когда расщепляется ее редуцированная часть, то в следующем предложении и его следствиях группы предполагаются редуцированными.

Предложение 4.16. *Пусть* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *– смешанная группа. Группа* G *расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) если $G_i\,(i \in I)$ *– смешанная группа, то она расщепляется;*
2) $T(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T(G_i)$.

Доказательство. Выполнение условия 1) следует из [47, стр. 224]. Докажем условие 2). Допустим противное, то есть пусть $T(\prod\limits_{i\in I} G_i) \neq \prod\limits_{i\in I} T(G_i)$, тогда группа $\prod\limits_{i\in I} T(G_i)$ содержит элемент g такой, что $o(g) = \infty$, $g = (\dots, g_i, \dots)$ и $o(g_i) = n_i\,(n_i \in \mathbb{N})$ для любого $i \in I$. Рассмотрим произвольную координату $g_i \neq 0$ и пусть $n_i = p_i^{k_i} m_i$, где p_i – такое простое число, что $(p_i,\, m_i) = 1$ и $k_i,\, m_i \in \mathbb{N}$. Тогда элемент $m_i g_i$ будет иметь порядок $p_i^{k_i}$. Группа G_i, как следует из леммы 4.1, будет содержать циклическое прямое слагаемое A_i порядка не меньшего $p_i^{k_i}$. Так как $o(g) = \infty$, то найдется координата g_j элемента g и простое число p_j такое, что $o(g_j) = p_j^{k_j} m_j$, где $(p_j,\, m_j) = 1$ и $k_j,\, m_j \in \mathbb{N}$, причем $p_j^{k_j} > p_i^{k_i}$. Тогда, согласно лемме 4.1, в группе G_j найдется циклическое прямое слагаемое A_j порядка не меньшего $p_j^{k_j}$. Продолжая таким образом, мы получим систему групп $\{A_i\}_{i\in I'}$, где $I' \subseteq I$ и $|I'| = \aleph_0$, порядки которых в совокупности неограничены. Так как каждая группа $A_i\,(i \in I')$ выделяется в группе G_i прямым слагаемым, то $\prod\limits_{i\in I} G_i = \prod\limits_{i\in I\setminus I'} G_i \oplus \prod\limits_{i\in I'} B_i \oplus \prod\limits_{i\in I'} A_i$, где $G_i = A_i \oplus B_i$ для любого $i \in I'$. Так как $\prod\limits_{i\in I} G_i$ расщепляется, то каждое прямое слагаемое этой группы также расщепляется, то есть $\prod\limits_{i\in I'} A_i = A \oplus T(\prod\limits_{i\in I'} A_i)$, где A – группа без кручения. Но $T(\prod\limits_{i\in I'} A_i)$ – ограниченная группа [46, следствие 40.3], что противоречит тому что она, с другой стороны, содержит неограниченную подгруппу $\bigoplus\limits_{i\in I'} A_i$. Обратно. Поскольку выполняется условие 1), то $G_i = A_i \oplus T(G_i)\,(i \in I)$, где A_i – группа без кручения. Тогда $\prod\limits_{i\in I} G_i = \prod\limits_{i\in I} A_i \oplus \prod\limits_{i\in I} T(G_i) = \prod\limits_{i\in I} A_i \oplus T(\prod\limits_{i\in I} G_i)$.

Следствие 4.17. *Если* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *– смешанная группа, где* $G_i\,(i \in I)$ *– периодические группы, то* G *– нерасщепляющаяся группа.*

Следствие 4.18. *Пусть* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *– смешанная группа,* $\{G_i\}_{i\in I}$ *– система групп, удовлетворяющая условию конечности. Группа* G *расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) если $G_i\,(i \in I)$ *– смешанная группа, то она расщепляется;*
2) если для простого числа p *найдется прямое слагаемое без кручения* A *группы* G *такое, что* $pA = A$*, то* $T_p(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$.
3) $\bigoplus\limits_{p\in\pi} \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I} \bigoplus\limits_{p\in\pi} T_p(G_i)$.

Доказательство. Необходимость следует из предложения 4.16. Для доказательства достаточности нам нужно показать, что $T(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T(G_i)$. Так как система $\{G_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию конечности, то, согласно следствию 4.4, для любого простого числа p, для которого найдется $i \in I$ такое, что группа $G_i/T(G_i)$ не p-делима следует, что $T_p(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$. Тогда имеем: $T(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} T_p(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \bigoplus\limits_{p\in\pi} \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I} \bigoplus\limits_{p\in\pi} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I} T(G_i)$.

Следствие 4.19. *Вполне транзитивная смешанная группа* G*, равная прямому произведению* $\mathbf{s}$*-обобщенно узких групп* $G_i\,(i \in I)$*, расщепляется тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) если $G_i\,(i \in I)$ *– смешанная группа, то она расщепляется;*
2) если для простого числа p *найдется прямое слагаемое без кручения* A *группы* G *такое, что* $pA = A$*, то* $T_p(\prod\limits_{i\in I} G_i) = \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i)$.
3) $\bigoplus\limits_{p\in\pi} \prod\limits_{i\in I} T_p(G_i) = \prod\limits_{i\in I} \bigoplus\limits_{p\in\pi} T_p(G_i)$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.1 и предыдущего следствия.

Следующая теорема отражает влияние свойства вполне транзитивности на сепарабельность прямого произведения абелевых редуцированных групп.

Теорема 4.20. *Группа* $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ *является вполне транзитивной сепарабельной группой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
1) G_i *– сепарабельная группа для любого* $i \in I$*;*
2) для любых однородных прямых слагаемых без кручения A *и* B *из* G *таких, что* $t(A) \neq t(B)$*, следует, что* $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$*;*
3) $G = \bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \oplus \bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i \oplus \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \oplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$*, где* J_1*,* J_2 *– конечные множества такие, что* $J_1 \subset I$*,* $J_2 \subset I\setminus J_1$*,* $I' = I\setminus(J_1 \cup J_2)$*;* $\prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$ *– ограниченная группа;* $A_i \cong G_i/T(G_i)$ *для любого* $i \in I \setminus J_1$*;* $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ $(j = \overline{1,\, k})$ *– однородные группы без кручения, причем если* $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ *для некоторого* $j = \overline{1,\, k}$*, то* $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ *имеет идемпотентный тип;* $\bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i$ *– однородно разложимая группа без кручения.*

Доказательство. Необходимость. Условие 2) следует из леммы 2.2 и леммы 2.1. Выполнение условия 1) получаем из [42, следствие 3]. Покажем справедливость условия 3). Так как G – сепарабельная группа, то выполняются условия 2) и 3) из [42, следствие 3]. То есть существует конечное подмножество $J_1 \subset I$ такое, что группы $T(G_i)\,(i \in I \setminus J_1)$ в совокупности ограничены. Тогда $G = \bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \oplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} G_i = \bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \oplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} A_i \oplus \prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$, где $A_i \cong G_i/T(G_i)$ для любого $i \in I \setminus J_1$ и $\prod\limits_{i\in I\setminus J_1} T(G_i)$ – ограниченная периодическая группа. Из выполнения условия 2) данного следствия и условия б) из [42, следствие 3] получим существование конечного подмножества $J_2 \subset I \setminus J_1$ и $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\prod\limits_{i\in I\setminus J_1} A_i = \prod\limits_{i\in J_2} A_i \oplus \prod\limits_{i\in I'} A_i$, где $k = \max|\tau(A_i)|_{i\in I'}$, и $\tau(A_i)\,(i \in I',\, I' = I \setminus (I_1 \cup I_2))$ – множество типов прямых слагаемых без кручения ранга 1 групп A_i. Так как каждая группа $A_i\,(i \in I')$ является вполне транзитивной сепарабельной группой без кручения, то, как вытекает из теоремы 2.4, она – однородно разложимая группа. Тогда $\prod\limits_{i\in I'} A_i = \prod\limits_{i\in I'} \bigoplus\limits_{j=1}^{k} A_i^{(j)} = \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$, причем для всякого $j = \overline{1,\, k}$ такого, что $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)} \neq \bigoplus\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ следует, что $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ – однородная группа идемпотентного типа [3]. То, что $\bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i$ – однородно разложимая группа также следует из ее вполне транзитивности и сепарабельности. Достаточность. Так как условия теоремы 4.14 выполняются, то G – вполне транзитивная группа. Поскольку G_i – сепарабельная группа для любого $i \in I$, то для сепарабельности группы G достаточно заметить, что $\prod\limits_{i\in I'} A_i^{(j)}$ – сепарабельная группа для любого $j = \overline{1,\, k}$ [42, следствие 3].

Замечание. Если в теореме 4.20 группы $G_i\,(i \in I)$ счетными, то о группах $\bigoplus\limits_{i\in J_1} G_i \oplus \bigoplus\limits_{i\in J_2} A_i$ и $A_i^{(j)}$ $(i \in I',\ j = \overline{1,\, k})$ из условия 3) можно получить дополнительную информацию: эти группы вполне разложимы [22, следствие 1.6], из чего следует, что если G – смешанная группа, то она расщепляется.

Литература

[1] Arnold D. M. Strongly homogeneous torsion-free abelian groups of finite rank // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 56. – P. 67-72.

[2] Bečvar J. Abelian groups in which every pure subgroup is an isotype subgroup // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1980. – Vol. 62. – P. 129-136.

[3] Beaumont R. A. A note on products of homogeneous free abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – P. 434-436.

[4] Carroll D., Goldsmith B. On transitive and fully transitive abelian p-groups // Proc. Royal Irish Academy. – 1996. – Vol. 96A, N. 1. – P. 33-41.

[5] Corner A. L. S. The independence of Kaplansly's notions of transitivity and full transitivity // Quart. J. Math. Oxford. – 1976. – Vol. 27, N. 105. – P. 15-20.

[6] Corner A. L. S., Göbel R. Prescribing endomorphism algebras, a unified treatment // Proc. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 50. – P. 447-479.

[7] Dugas M., Hausen J. Torsion-free E-uniserial groups of infinite rank // Contemp. Math. – 1989. – Vol. 87. – P. 181-189.

[8] Dugas M., Shelah S. E-transitive groups in L // Abelian Group Theory. Amer. Math. Soc. – 1989. Vol. 87. – P. 191-199.

[9] Files S. Transitivity and full transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. – 1997. – Vol. 197. – P. 468-478.

[10] Files S., Goldsmith B. Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol. 126, N. 6. – P. 1605-1610.

[11] Griffith P. Transitive and fully transitive primary abelian groups // Pacific J. Math. – 1968. – Vol. 25, N. 2. – P. 249-254.

[12] Hausen J. E-transitive torsion-free abelian groups // J. Algebra. – 1987. – Vol. 107, N. 1. – P. 17-27.

[13] Hennecke G., Strüngmann L. Transitivity and full transitivity for p-local modules // Archiv der Mathematik. – 2000. – Vol. 74. – P. 321-329.

[14] Hill P. On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Am. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22, N. 2. – P. 414-417.

[15] Hill P., Megibben Ch. On the theory and classification of abelian p-groups // Math. Z. – 1985. – Vol. 190. – P. 17-38.

[16] Le Borgne M. Groups λ-séparables // C. r. Acad. sci. – 1975. – Vol. 281, N. 12. – A 415-A 417.

[17] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups // Ann Arbor: University of Michigan Press. – 1954.

[18] Krylov P. A., Mikhalev A. V. and Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht – Boston – London. – 2003.

[19] Mader A. The fully invariant subgroups of reduced algebraically compact groups // Publ. Math. Debrecen. – 1970. – Vol. 17, N. 1-4. – P. 299-306.

[20] Megibben C. Large subgroups and small homomorphisms // Michigan Mathematical Journal. – 1966. – Vol. 13. – P. 153-160.

[21] Megibben C. A nontransitive, fully transitive primary group // J. Algebra. – 1969. – Vol. 13. – P. 571-574.

[22] Megibben C. Separable mixed groups // Comment. Math. Univ. Carol. – 1980. – Vol. 21, N. 4. – P. 755-768.

[23] Nunke R. J. Purity and subfunctors of the identity // Topics in Abelian Groups. Chicago. Illinois. – 1963. – P. 121-171.

[24] Paras A., Strungmann L. Fully transitive p-groups with finite first Ulm subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – Vol. 131. – P. 371-377.

[25] Rangaswamy K. M. Full subgroups of abelian groups // Indian J. Math. – 1964. – Vol. 6. – P. 21-27.

[26] Rangaswamy K. M. Groups with special properties // Proc. Nat. Inst. Sci. India. – 1965. – Vol. A 31. – P. 531-526.

[27] Rangaswamy K. M. The theory of separable mixed abelian groups // Commun. Algebra. – 1984. – Vol. 12, N. 15-16. – P. 1813-1834.

[28] Беккер И. Х., Крылов П. А., Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения, близкие к алгебраически компактным // Абелевы группы и модули – Томск, 1994. – С. 3-52.

[29] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули – Томск, 1982. – С. 56-92.

[30] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундам. и прикл. мат. – 2002. – Т. 8, N. 2. – С. 407-472.

[31] Гриншпон С. Я., Мисяков В.М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули – Томск, 1986. – С. 12-27.

[32] Гриншпон С. Я., Мисяков В.М. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули – Томск, 1991. – С. 23-30.

[33] Добрусин Ю. Б. О расщепляющихся квазисервантно инъективных группах // Абелевы группы и модули – Томск, 1984. – С. 11-23.

[34] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения, II // Абелевы группы и модули – Томск, 1985. – С. 31-41.

[35] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули – Томск, 1986. – С. 36-53.

[36] Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике – Томск, 1973. – С. 15-20.

[37] Крылов П. А. Сильно однородные абелевы группы без кручения // Сиб. матем. журн. – 1983. – Т. 24, N. 2. – С. 77-84.

[38] Крылов П. А. Об абелевых группах без кручения, 1 // Абелевы группы и модули – Томск, 1984. – С. 40-64.

[39] Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули – Томск, 1988. – С. 81-99.

[40] Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29, N. 5. – С. 549-560.

[41] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Матем. сб. – 1945. – Т. 16. – С. 129-162.

[42] Мисяков В. М. О сепарабельности прямого произведения произвольных абелевых групп // Абелевы группы и модули – Томск, 1991. – С. 83-85.

[43] Мисяков В. М. Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули – Томск, 1994. – С. 134-156.

[44] Москаленко А. И. О копериодической оболочке сепарабельной p-группы // Алгебра и логика. – 1989. – Т. 28, N. 2. – С. 207-226.

[45] Рычков С. В. О прямых произведениях абелевых групп // Мат. сб. – 1982. – Т. 117 (159), N. 2. – С. 266-278.

[46] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир. – 1974. – Т. 1. – 335 с.

[47] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир. – 1977. – Т. 2. – 416 с.

[48] Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули – Томск, 1991. – С. 157-178.

[49] Чехлов А. Р. Об абелевых QCS-группах без кручения // Абелевы группы и модули – Томск, 1994. – С. 240-245.

[50] Чехлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p-ранга // Алгебра и логика. – 2001. – Т. 40, N. 6. – С. 698-715.