О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы

А. В. КАРПЕНКО, В. М. МИСЯКОВ

Томский государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, центр, регулярное кольцо.

Аннотация

Исследуются абелевы группы, имеющие регулярный центр колца эндоморфизмов.

В данной статье рассматривается вопрос, сформулированный как проблема 16 в книге [1]: "Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны?" Напомним, что кольцо R называется регулярным, если для каждого элемента $x \in R$ существует элемент $y \in R$ такой, что $xyx = x$. Поскольку хорошо известно, что центр регулярного кольца является регулярным, то класс абелевых групп, имеющих регулярный центр кольца эндоморфизмов, будет содержать класс абелевых групп с регулярным кольцом эндоморфизмов. В тоже время, как будет показано ниже, в некоторых случаях эти классы совпадают.

Введем следующие обозначения. Группы, встречающиеся в работе, – абелевы; $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел; прямую сумму и произведение групп (колец) обозначаем символами $\oplus$ и $\times$ или $\prod$ соответственно. Пусть X и Y – группы. Тогда $T\,(X)$ – периодическая часть группы X, $T_p\,(X)$ – p-компонента $T\,(X)$, $\mathrm{E}\,(X)$ – кольцо эндоморфизмов группы X, $\mathrm{Hom}\,(X,\,Y)$ – группа гомоморфизмов из X в Y, $X\,[p\,] = \{a \in X \mid p\,a = 0\}$, $\mathrm{C}\,(R)$ – центр кольца R. Неопределяемые понятия ("редуцированная группа "высотная матрица элемента" и т.п.) можно найти в книгах [5], [6], [7].

Лемма 1. *Центр кольца эндоморфизмов группы G регулярен тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ следует, что $G = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ – регулярное кольцо. Тогда для любого $\alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ существует $\beta \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ со свойством $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Справедливы включения $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha\beta\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\alpha)$ и $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta\alpha) = \ker(\alpha)$. Откуда $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\alpha\beta)$ и $\ker(\alpha) = \ker(\beta\alpha) = \ker(\alpha\beta)$. Так как $\alpha\beta$ – идемпотент кольца $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$, то $G = \mathrm{im}(\alpha\beta) \oplus \ker(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha)$.

Обратно, допустим, что для любого $0 \neq \alpha \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ следует, что $G = \mathrm{im}(\alpha) \oplus \ker(\alpha)$. Тогда $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}$ является автоморфизмом на $\mathrm{im}(\alpha)$. Следовательно, существует $\beta \in \mathrm{E}(G)$, аннулирующий $\ker(\alpha)$ и обратный к $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}$ на $\mathrm{im}(\alpha)$. Покажем, что $\beta \in \mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$. Пусть $\varphi \in \mathrm{E}(G)$ и $x \in G$, тогда $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, $x_2 \in \ker(\alpha)$. Следовательно, $(\varphi\beta)(x) = \varphi(\beta(x_1 + x_2)) = \varphi(\beta(x_1))$. Так как $x_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, то существует $a_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$ такой, что $\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}(a_1) = x_1$. Поскольку $\mathrm{im}(\alpha)$, $\ker(\alpha)$ – вполне характеристические подгруппы в G, то $\varphi(\beta(x_1)) = \varphi(\beta(\alpha|_{\mathrm{im}(\alpha)}(a_1))) = \varphi(a_1) = (\beta\alpha)(\varphi(a_1)) = \beta(\varphi(\alpha(a_1))) = \beta(\varphi(x_1)) = \beta(\varphi(x_1)) + \beta(\varphi(x_2)) = (\beta\varphi)(x)$.

Пусть $a \in G$, тогда $a = a_1 + a_2$, где $a_1 \in \mathrm{im}(\alpha)$, $a_2 \in \ker(\alpha)$. Следовательно, $(\alpha\beta\alpha)(a) = (\alpha\beta\alpha)(a_1) = \alpha(a_1) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2) = \alpha(a)$. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально.

Замечание 1. Поскольку, как было показано в [2] и [3], кольцо эндоморфизмов элементарной или делимой группы без кручения регулярно, то центр этого кольца также регулярен.

Замечание 2. Будем использовать также следующее, легко доказываемое утверждение. Пусть $G = A \oplus B$, где A, B – вполне характеристические подгруппы группы G. Кольцо $\mathrm{C}(\mathrm{E}(G))$ регулярно тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}(\mathrm{E}(A))$, $\mathrm{C}(\mathrm{E}(B))$ – регулярные кольца.

Далее существенную роль будут играть идеализации бимодулей. Напомним это понятие.

Пусть R и S – кольца, M – R-S-бимодуль. *Идеализацией бимодуля M* называется кольцо, состоящее из всех матриц вида $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$, где

$r \in R$, $s \in S$, $m \in M$ с обычными для матриц операциями сложения и умножения. Обозначим построенное кольцо символом $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ или одной буквой K. Будем отождествлять естественным образом кольца R и S с $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ соответственно, произведение $R \times S$ – с $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ и бимодуль M – с $\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В целях экономии места диагональную матрицу $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ записываем в виде вектора (r, s). Имеются два канонических сюръективных гомоморфизма колец:

$$K \to R, \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to r, \; K \to S, \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \to s.$$

Напомним следующую лемму, доказанную в [8].

Лемма 2. *Центр* $\mathrm{C}\,(K)$ *идеализации* K R-S-*бимодуля* M *состоит из всех диагональных матриц* $(r,\, s)$, *где* $r \in \mathrm{C}\,(R)$, $s \in \mathrm{C}\,(S)$ *и* $rm = ms$ *для каждого* $m \in M$.

Если A – левый R-модуль, то его аннулятор будем обозначать через $\mathrm{Ann}_R\, A$. Из данной леммы следует, что $\mathrm{C}\,(K)$ является подкольцом в $\mathrm{C}\,(R) \times \mathrm{C}\,(S)$ и так же получается, что $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(R)}\, M$, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(S)}\, M \subseteq \mathrm{C}\,(K)$. Учитывая замечание перед леммой 2, мы имеем кольцевые гомоморфизмы $f : \mathrm{C}\,(K) \to \mathrm{C}\,(R)$, $(r,\, s) \to r$ и $g : \mathrm{C}\,(K) \to \mathrm{C}\,(S)$, $(r,\, s) \to s$. Аннуляторы $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(R)}\, M$ и $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(S)}\, M$ остаются на месте при действии гомоморфизмов f и g соответственно. В частности, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(R)}\, M \subseteq \mathrm{im}\,(f)$, $\mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(S)}\, M \subseteq \mathrm{im}\,(g)$. Приведем еще один результат из [8], на который будем ссылаться в дальнейшем.

Лемма 3. *В принятых обозначениях имеем*
1) $\ker\,(f) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(S)}\, M$ *и* $\ker\,(g) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{C}\,(R)}\, M$*;*
2) если M *– точный* $\mathrm{C}\,(S)$*-модуль, то* f *– мономорфизм, если же* M *– точный* $\mathrm{C}\,(R)$*-модуль, то* g *– мономорфизм.*

Рассматривая кольца эндоморфизмов групп, мы можем получить идеализацию бимодуля в следующей ситуации. Пусть G – прямая сумма двух групп, $G = B \oplus A$, причем B – вполне характеристическое слагаемое, то есть $\mathrm{Hom}\,(B,\, A) = 0$. Группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)$ стандартным способом превращается в $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуль. Следовательно, можно записать идеализацию этого бимодуля:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}\,(B) & \mathrm{Hom}\,(A,\, B) \\ 0 & \mathrm{E}\,(A) \end{pmatrix}.$$

Поскольку известно, что кольцо $\mathrm{E}\,(G)$ естественным образом отождествляется с данным кольцом матриц (см. [6, теорема 106.1]), то кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}\,(G)$ можно считать идеализацией $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуля $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)$.

Предложение 4. *Пусть $G = B \oplus A$, где A – редуцированная непериодическая группа, B – делимая группа без кручения. Тогда центр кольца эндоморфизмов группы G можно отождествить с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, порожденным 1 и всеми числами $1/p$ такими, что $pG = G$.*

Доказательство. Пусть $G = B \oplus A$, где A и B удовлетворяют условию предложения, причем $B \neq 0$. Из $\mathrm{Hom}\,(B,\, A) = 0$ заключаем, что кольцо $\mathrm{E}\,(G)$ представляет собой идеализацию $\mathrm{E}\,(B)$-$\mathrm{E}\,(A)$-бимодуля $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)$. Покажем, что $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)$ – точный $\mathrm{E}\,(A)$-модуль. Допустим, напротив, что $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)\alpha = 0$ для какого-то $0 \neq \alpha \in \mathrm{E}\,(A)$. Нетрудно показать, что существует элемент $a \in A$ такой, что $\circ(a) = \infty$ и $\alpha\,(a) \neq 0$. Пусть $0 \neq b \in B$. Так как высотная матрица элемента $\alpha\,(a)$ в группе A меньше высотной матрицы элемента b в группе B, то существует $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A,\, B)$ такой, что $\varphi\,(\alpha\,(a)) = b$. Поскольку $b \neq 0$, то $\varphi\alpha \neq 0$, что противоречит допущению. Таким образом, $\mathrm{Hom}\,(A,\, B)$ – точный $\mathrm{E}\,(A)$-модуль. По лемме 3 кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ вкладывается в кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(B))$ изоморфное $\mathbb{Q}$. Покажем, что кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ можно отождествить с подкольцом поля $\mathbb{Q}$. Поскольку все натуральные числа принадлежат $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, то для этого отождествления достаточно показать, что если какое-то рациональное число вида $\frac{1}{q} \in \mathrm{im}\,(\varphi)$, где φ – вложение кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ в поле $\mathbb{Q}$, то найдется эндоморфизм из $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, который действует на элементах группы G как умножение на дробь $\frac{1}{q}$. Пусть в $\mathrm{im}\,(\varphi)$ разрешимо уравнение $qx = 1$ (где q – простое число), то есть существует $\beta \in \mathrm{im}\,(\varphi)$ такое, что $q\beta = 1$. Поскольку $\varphi\,(\alpha) = \beta$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, то это означает, что

α – решение уравнения $qy = 1$ в кольце $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$. Тогда для любого $g \in G$, $\alpha\,(g) = (\frac{1}{q}\,q)\,(\alpha\,(g)) = \frac{1}{q}\,(q\alpha)\,(g) = \frac{1}{q}\,(g)$. Следовательно, элементы центра представляют умножения на рациональные числа m/n. При этом ясно, что $nG = G$. Наоборот, если $nG = G$, то умножение группы G на число m/n лежит в $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$. Получили, что центр $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ отождествляется с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, указанным в предложении.

Докажем основной результат данной работы.

Теорема 5. *1) Если G – нередуцированная группа, то $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ – регулярное кольцо тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*
а) G – делимая группа без кручения;
б) $G = A \oplus D$, где A – элементарная группа, а D – делимая группа без кручения.
2) Если G – редуцированная группа и $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ – регулярное кольцо, то $T\,(G)$ – элементарная группа, $G\,/\,T\,(G)$ – делимая группа и
$\bigoplus\limits_{p\in P} T_p\,(G) \subseteq G \subseteq \prod\limits_{p\in P} T_p\,(G)$.

Доказательство. Заметим, что большая часть доказательства этой теоремы повторяет идею соответствующих доказательств из [2] и [3]. Так, например, доказательство условия 2) полностью переносится из этих работ, если заменить $\mathrm{E}\,(G)$ на его центр. Для полноты картины докажем условие 1). Пусть $G = A \oplus D$, где A – редуцированная, $0 \neq D$ – делимая группы. Допустим, что $T\,(G) = 0$. Пусть n – произвольное натуральное число. Поскольку $n \in \mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, то из регулярности $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ следует, что $G = \mathrm{im}\,(n) \oplus \ker\,(n)$. По предположению G – группа без кручения, поэтому $\ker\,(n) = 0$ и $G = \mathrm{im}\,(n) = nG$, то есть G – делимая группа без кручения. Пусть $T\,(G) \neq 0$. Тогда умножение на фиксированное простое число p является эндоморфизмом из $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$, ядро которого равно $T_p\,(G)\,[p]$. Из регулярности кольца $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ следует, что $T_p\,(G)\,[p]$ выделяется прямым слагаемым, но это возможно только, если $T_p\,(G)$ совпадает с $T_p\,(G)\,[p]$. Следовательно, $T\,(G)$ – элементарная группа. Поскольку элементарная группа не является делимой, то D – делимая группа без кручения, причем $T\,(G) = T\,(A)$ и $A \neq 0$. Допустим, что $A \neq T\,(A)$. Тогда по предложению 4 кольцо $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G))$ изоморфно подкольцу L поля $\mathbb{Q}$, которое порождается 1 и всеми числами $1/p$ такими, что $p\,G = G$.

Если предположить, что $L \neq \mathbb{Q}$, то найдется простое число q такое, что $1/q \notin L$. Из регулярности кольца L следует существование $x \in L$ со свойством $qxq = q$. Откуда $x = 1/q \in L$, что противоречит допущению. Таким образом, $\mathrm{C}\,(\mathrm{E}\,(G)) \cong \mathbb{Q}$ и $p\,G = G$ для любого простого числа p, но это невозможно ввиду редуцированности прямого слагаемого A в G. Следовательно, $A = T\,(A)$ – элементарная группа. Обратное утверждение вытекает из замечаний 1 и 2.

Литература

[1] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht — Boston — London. — 2003.

[2] Fuchs L., Rangaswamy K. M. On generalized regular rings // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 71—81.

[3] Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphic images of special types // J. Algebra. — 1967. — Vol. 6. — P. 271—280.

[4] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups // Comm. Algebra. — Vol. 22, N. 4. — P. 1161—1176.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. — 1974. — Т. 1.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир. — 1977. — Т. 2.

[7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир. — 1977. — Т. 1.

[8] Крылов П. А., Классен Е. Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, N. 2. — С. 1074—1085.