Т-радикалы в категории абелевых групп

Е. А. ТИМОШЕНКО
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

УДК 512.541+512.553.12

Ключевые слова: абелева группа, радикал, тензорное произведение, кручение, решётка.

Аннотация

В работе исследуется класс идемпотентных радикалов, определяемых при помощи тензорного произведения. Описано их действие на абелевы группы, установлено строение решётки всех таких радикалов. Рассматриваемые радикалы охарактеризованы в терминах свойств замкнутости их радикальных классов.

Abstract

E. A. Timoshenko, T-radicals in the category of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 3, pp. 193—208.

This paper is devoted to the class of idempotent radicals defined by means of a tensor product. We describe their effect on Abelian groups. The structure of the lattice of all such radicals is determined. We characterize these radicals in terms of the closure properties of their radical classes.

1. Введение

В работе изучены свойства класса идемпотентных радикалов, задаваемых при помощи тензорного произведения, — Т-радикалов. В качестве вспомогательного инструмента в статье используется ещё один класс радикалов — Е-радикалы. Данная терминология основана на использованных в [6, 12] обобщениях понятий Т-модуля [2] и Е-модуля [2,11]. Нас будет интересовать случай модулей над кольцом целых чисел, т. е. абелевых групп. На протяжении всей статьи под группой будем понимать абелеву группу. Запись $B \leqslant A$ означает, что B есть подгруппа группы A.

Зафиксируем некоторую группу F.

Определение 1.1. Группа A называется $\mathrm{T}(F)$-группой, если выполнено равенство $A \otimes F = 0$. Класс всех $\mathrm{T}(F)$-групп обозначим $\mathcal{T}(F)$.

Предложение 1.2. *Класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно*

а) *прямых сумм*;

б) *гомоморфных образов*;

в) *расширений.*

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 3, с. 193—208.

Для доказательства достаточно воспользоваться изоморфизмом

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big)\otimes F \cong \bigoplus_{i\in I}(A_i\otimes F)$$

и точностью последовательностей вида

$$B\otimes F \longrightarrow A\otimes F \longrightarrow (A/B)\otimes F \longrightarrow 0.$$

Пример 1.3. Покажем, что класс всех $\mathrm{T}(F)$-групп, вообще говоря, не является замкнутым относительно взятия прямых произведений. Действительно, пусть $F=\mathbf{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел. Тогда, очевидно, квазициклическая группа $A=\mathbf{Z}(p^\infty)$ — $\mathrm{T}(F)$-группа. Зададим группу B как прямое произведение некоторого бесконечного семейства копий группы A. Ясно, что группа B будет делимой, но не периодической. Поэтому (в силу теоремы, описывающей строение делимых групп) B имеет прямое слагаемое, изоморфное $\mathbf{Q}$. Итак, $B\otimes\mathbf{Q}\neq 0$ и, следовательно, $B\notin\mathcal{T}(F)$.

Пусть V — абелева группа.

Определение 1.4. Группа A называется $\mathrm{E}(V)$-группой, если выполнено равенство $\mathrm{Hom}(V,A)=0$. Класс всех $\mathrm{E}(V)$-групп обозначим $\mathcal{E}(V)$.

Предложение 1.5. *Класс $\mathcal{E}(V)$ замкнут относительно*

а) *прямых произведений*;

б) *подгрупп*;

в) *расширений.*

Из этого предложения, в частности, следует, что класс $\mathcal{E}(V)$ замкнут относительно прямых сумм.

Напомним несколько определений и фактов из теории радикалов [1, 4].

Определение 1.6. Говорят, что в категории абелевых групп задан идемпотентный радикал ρ, если каждой группе A поставлена в соответствие её подгруппа $\rho(A)$ так, что для любого гомоморфизма групп $\varphi\colon A\to B$ справедливо включение $\varphi\big(\rho(A)\big)\subseteq\rho(B)$, причём выполнены следующие свойства:

$$\rho\big(\rho(A)\big)=\rho(A) \text{ для любой группы } A; \tag{P1}$$

$$\rho\big(A/\rho(A)\big)=0 \text{ для любой группы } A. \tag{P1*}$$

Определение 1.7. Идемпотентный радикал ρ называется кручением, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\rho(B)=B\cap\rho(A) \text{ для любой группы } A \text{ и подгруппы } B\leqslant A. \tag{P2}$$

Пусть ρ — идемпотентный радикал. Класс всех групп A, для которых выполняется равенство $\rho(A)=A$, назовём ρ-радикальным; класс, определяемый условием $\rho(A)=0$, — ρ-полупростым. Заметим, что ρ однозначно определяется как своим радикальным, так и своим полупростым классом. Идемпотентный радикал удовлетворяет условию (P2) тогда и только тогда, когда его радикальный класс замкнут относительно подгрупп.

Через $\mathrm{W}_F(A)$ мы обозначим сумму всех подгрупп B группы A, являющихся $\mathrm{T}(F)$-группами. В этом случае W_F является идемпотентным радикалом, причём $\mathcal{T}(F)$ — его радикальный класс [1]. В дальнейшем этот идемпотентный радикал будем для краткости называть $\mathrm{T}(F)$-радикалом.

Через $\mathrm{H}_V(A)$ будем обозначать пересечение всех подгрупп B группы A, таких что A/B есть $\mathrm{E}(V)$-группа. Тогда H_V является идемпотентным радикалом, а его полупростой класс совпадает с классом $\mathcal{E}(V)$ [1]. Далее этот радикал будем называть $\mathrm{E}(V)$-радикалом.

Радикальный и полупростой классы произвольного идемпотентного радикала удовлетворяют условиям замкнутости из предложений 1.2 и 1.5 соответственно. В дальнейшем мы иногда будем опускать слово «идемпотентный» и писать просто «радикал».

Для идемпотентных радикалов естественным образом вводится частичный порядок: $\rho \leqslant \rho'$ тогда и только тогда, когда $\rho(A) \subseteq \rho'(A)$ для любой группы A. Согласованные с этим частичным порядком пересечение и объединение произвольного семейства идемпотентных радикалов $\{\rho_i\}_{i\in I}$ определяются следующим образом:

$$\Bigl(\bigwedge_{i\in I} \rho_i\Bigr)(A) = \sum\{B \leqslant A \mid \rho_i(B) = B \text{ для любого } i \in I\}, \tag{1}$$

$$\Bigl(\bigvee_{i\in I} \rho_i\Bigr)(A) = \bigcap\{B \leqslant A \mid \rho_i(A/B) = 0 \text{ для любого } i \in I\}. \tag{2}$$

Относительно этих операций совокупность всех идемпотентных радикалов категории абелевых групп составляет полную «решётку» с нулём и единицей. Термин «решётка» в данном случае используется условно, поскольку мы не можем сказать, что рассматриваемая совокупность составляет множество.

Отметим, что большему радикалу соответствует больший радикальный и меньший полупростой класс. В частности, условие $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$ равносильно включению $\mathcal{T}(F) \subseteq \mathcal{T}(G)$, а условие $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{H}_U$ — включению $\mathcal{E}(V) \supseteq \mathcal{E}(U)$. Заметим также, что H_V — наименьший идемпотентный радикал, радикальный класс которого содержит группу V.

Предложение 1.8. *Пусть имеется прямое разложение*

$$F = \bigoplus_{i\in I} F_i. \tag{3}$$

Тогда справедливы равенства

$$\bigwedge_{i\in I} \mathrm{W}_i = \mathrm{W}_F,$$

$$\bigvee_{i\in I} \mathrm{H}_i = \mathrm{H}_F$$

(*через* W_i *и* H_i *мы обозначили* $\mathrm{T}(F_i)$*-радикалы и* $\mathrm{E}(F_i)$*-радикалы соответственно*).

Утверждение вытекает из очевидных равенств

$$\mathcal{T}(F) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}(F_i), \tag{4}$$

$$\mathcal{E}(F) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}(F_i). \tag{5}$$

2. Решётка T-радикалов

Условимся обозначать радикальный класс идемпотентного радикала ρ через R_ρ. Множество всех простых чисел будет обозначаться P. Периодическую часть группы A будем обозначать $\mathbf{t}(A)$, p-компоненту группы A — $\mathbf{t}_p(A)$ или A_p. Для наибольшей делимой подгруппы группы A будет использоваться обозначение $\mathbf{d}(A)$. Заметим, что $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_p$ и $\mathbf{d}$ тоже идемпотентные радикалы.

Следующая лемма объединяет несколько простых фактов, касающихся тензорных произведений абелевых групп.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения*:

а) $A \otimes \mathbf{Z}(p) = 0$ *тогда и только тогда, когда* A — p-*делимая группа*;
б) $A \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $A/\,\mathbf{t}(A)$ — p-*делимая группа*;
в) *если* p-*группа* G *не является делимой, то* $A \otimes G = 0$ *тогда и только тогда, когда группа* A *является* p-*делимой*;
г) *если группы* A *и* G *не являются периодическими, то* $A \otimes G \neq 0$.

Лемма 2.2 (Диксон, [8]). *Пусть* ρ — *идемпотентный радикал,* A — *абелева группа.* $A \in R_\rho$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{t}(A) \in R_\rho$ *и* $A/\,\mathbf{t}(A) \in R_\rho$.

Учитывая, что $\mathbf{t}$ — кручение, легко убедиться в том, что символы $\mathbf{t}$ и ρ коммутируют, т. е. $\rho\big(\mathbf{t}(A)\big) = \mathbf{t}\big(\rho(A)\big)$ для всякой группы A. Из леммы 2.2 также следует, что если $A \in R_\rho$, то $\mathbf{t}_p(A) \in R_\rho$.

Пусть F — непериодическая абелева группа. Тогда по лемме 2.1 класс $\mathcal{T}(F)$ может содержать лишь периодические группы. Следовательно, для всякой абелевой группы A верны равенства

$$\mathrm{W}_F(A) = \mathbf{t}\big(\mathrm{W}_F(A)\big) = \mathrm{W}_F\big(\mathbf{t}(A)\big) = \mathrm{W}_F\left(\bigoplus_{p \in P} A_p\right) = \bigoplus_{p \in P} \mathrm{W}_F(A_p). \tag{6}$$

Пусть M_1 обозначает множество, состоящее из трёх элементов произвольной природы: l, m и n. Зададим функцию $\psi^F \colon P \to M_1$ следующим образом:

$$\psi^F(p) = \begin{cases} l, & \text{если группа } F \text{ является } p\text{-делимой}, \\ m, & \text{если группа } F \text{ не является } p\text{-делимой,} \\ & \text{а фактор-группа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ является,} \\ n, & \text{если фактор-группа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ не является } p\text{-делимой.} \end{cases}$$

Заметим, что для произвольной функции $\psi\colon P \to M_1$ можно подобрать такую группу F, что $\psi^F = \psi$. Например, достаточно положить

$$F = F(\psi) = \mathbf{Q}^{(lm)} \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto m} \mathbf{Z}(p) \Big).$$

(Здесь $\mathbf{Q}^{(lm)}$ — группа всех рациональных чисел, знаменатели которых — произведения степеней таких простых чисел p, что $\psi(p) \in \{l, m\}$, а сумма циклических групп берётся по всем p, для которых $\psi(p) = m$. Подобная нотация будет использоваться и далее.)

Вернёмся к группе F. Совокупность всех p-групп, входящих в радикальный класс некоторого идемпотентного радикала, состоит либо из всех p-групп, либо из всех делимых p-групп, либо из одной лишь нулевой группы [3,8]. Рассмотрим три случая.

1. $\psi^F(p) = l$. Тогда $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$. Поэтому все p-группы A содержатся в классе $\mathcal{T}(F)$ и для них выполнено $\mathrm{W}_F(A) = A$.
2. $\psi^F(p) = m$. В этом случае $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{T}(F)$, $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(F)$. Следовательно, класс $\mathcal{T}(F)$ содержит p-группу тогда и только тогда, когда она делима. Поэтому для произвольной p-группы A выполнено $\mathrm{W}_F(A) = \mathbf{d}(A)$.
3. $\psi^F(p) = n$. Тогда по лемме 2.1 получаем, что $\mathbf{Z}(p^\infty) \notin \mathcal{T}(F)$. Следовательно, класс $\mathcal{T}(F)$ не содержит ненулевых p-групп, и мы имеем $\mathrm{W}_F(A) = 0$ для произвольной p-группы A.

Итак, если группа F не является периодической, то действие идемпотентного радикала $\rho = \mathrm{W}_F$ на произвольную абелеву группу A описывается формулой

$$\rho(A) = \Big(\bigoplus_{p \mapsto l} A_p \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto m} \mathbf{d}(A_p) \Big). \tag{7}$$

Отметим два частных случая: если $F = \mathbf{Q}$, то $\mathrm{W}_F = \mathbf{t}$; если же $F = \mathbf{Q}^{(p)}$ (группа всех рациональных чисел, знаменателями которых являются степени простого числа p), то $\mathrm{W}_F = \mathbf{t}_p$.

Обратно, всякий радикал вида (7) является $\mathrm{T}(F)$-радикалом для подходящим образом выбранной непериодической группы F. Обозначим через $\mathcal{L}_1$ множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, порождаемых непериодическими группами F. Выше мы фактически установили взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{L}_1$ и множеством всех функций $\psi\colon P \to M_1$.

Введём на M_1 отношение порядка: $n \leqslant m \leqslant l$. Пусть M_1^P есть множество, состоящее из всех последовательностей вида

$$\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \ldots, \alpha_p, \ldots), \tag{8}$$

члены которых занумерованы простыми числами и принадлежат M_1. Порядок на M_1^P задаётся естественным образом: будем считать, что $\alpha \leqslant \beta$ в том и только в том случае, когда $\alpha_p \leqslant \beta_p$ для всех $p \in P$. Нетрудно убедиться, что относительно этого порядка M_1^P является полной дистрибутивной решёткой.

Определим отображение $\varphi_1\colon \mathcal{L}_1 \to M_1^P$ следующим образом:

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) = (\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \ldots, \psi^F(p), \ldots). \tag{9}$$

В силу проведённых ранее рассуждений это отображение, во-первых, определено корректно, а во-вторых, является биекцией.

Теорема 2.3. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_1$ является полной дистрибутивной решёткой, а отображение φ_1 — изоморфизмом решёток. Нулём решётки $\mathcal{L}_1$ служит радикал $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}}$, единицей — радикал $\mathbf{t}$.*

Доказательство. Имеют место следующие эквивалентности:

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_1(\mathrm{W}_G) \iff \psi^F(p) \leqslant \psi^G(p) \text{ для любого } p \in P \iff$$
$$\iff \mathrm{W}_F(A) \subseteq \mathrm{W}_G(A) \text{ для любой } p\text{-группы } A \overset{(6)}{\iff} \mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G\,.$$

Таким образом, отображение φ_1 есть изоморфизм частично упорядоченных множеств. Следовательно, оно является также изоморфизмом решёток [5]. Отсюда получаем, что $\mathcal{L}_1$ — полная дистрибутивная решётка. Указать её наименьший и наибольший элементы не составляет труда. ☐

Следующее предложение показывает, что любой радикал из $\mathcal{L}_1$ можно представить как $\mathrm{E}(V)$-радикал.

Предложение 2.4. $\mathrm{T}(F)$*-радикал вида* (7) *совпадает с радикалом* H_V*, где*

$$V = V(\psi^F) = \Bigl(\bigoplus_{p\mapsto l} \mathbf{Z}(p)\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{Z}(p^\infty)\Bigr). \tag{10}$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{W}_F(V) = V$. Поэтому $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{W}_F$. Предположим теперь, что $A \in \mathcal{T}(F)$. Это значит, что группа A периодическая, причём её p-компоненты A_p делимы для всех p, для которых $\psi^F(p) = m$, и равны нулю для всех p, для которых $\psi^F(p) = n$. Нетрудно заметить, что H_V-полупростая фактор-группа $B = A/\,\mathrm{H}_V(A)$ также обладает этими свойствами. Но в этом случае равенство $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ возможно лишь при $B = 0$. Итак, $\mathrm{H}_V(A) = A$ и, следовательно, $\mathrm{H}_V \geqslant \mathrm{W}_F$. Доказательство завершено. ☐

Предложение 2.5. *Множество $\mathcal{L}_1$ является полной подрешёткой «решётки» всех идемпотентных радикалов, действующих на абелевых группах.*

Доказательство. Пусть $\{\mathrm{W}_i\}_{i\in I}$ — произвольное подмножество в $\mathcal{L}_1$. Из предложения 1.8 мы знаем, что пересечение (в смысле (1)) радикалов из этого подмножества также принадлежит $\mathcal{L}_1$. Положим $\rho(A) = \sum \mathrm{W}_i(A)$ для всех A. Очевидно, что тогда ρ также имеет вид (7), поэтому $\rho \in \mathcal{L}_1$. Несложно заметить, что ρ является наименьшим из всех идемпотентных радикалов, для которых $\mathrm{W}_i \leqslant \rho$ при всех $i \in I$. Следовательно, он совпадает с объединением (в смысле (2)) всех радикалов из рассматриваемого подмножества. Таким образом, $\mathcal{L}_1$ действительно полная подрешётка. ☐

Допустим теперь, что F — ненулевая p-группа. Возможны два случая.

1. F — делимая группа. В этом случае класс $\mathcal{T}(F)$ состоит из всех групп A, для которых фактор-группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ p-делимая (лемма 2.1).
2. Группа F не является делимой. Это говорит о том, что класс $\mathcal{T}(F)$ состоит в точности из всех p-делимых групп.

Очевидно, что если $F = 0$, то класс $\mathcal{T}(F)$ содержит все абелевы группы и для всякой группы A имеем $\mathrm{W}_F(A) = A$.

Пусть теперь F — произвольная периодическая группа, $F = \bigoplus F_p$. В соответствии с (4) имеем

$$\mathcal{T}(F) = \bigcap_{p\in P} \mathcal{T}(F_p). \tag{11}$$

Пусть M_2 обозначает множество, состоящее из трёх элементов λ, μ и ν. Определим функцию $\psi^F\colon P \to M_2$ по следующему правилу:

$$\psi^F(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p\text{-компонента } F_p \text{ не является делимой,} \\ \mu, & \text{если } F_p \text{ — ненулевая делимая группа,} \\ \nu, & \text{если } F_p = 0. \end{cases}$$

Для произвольной функции $\psi\colon P \to M_2$ можно найти такую абелеву группу F, что $\psi^F = \psi$. Примером служит

$$F = F(\psi) = \Bigl(\bigoplus_{p\mapsto\lambda} \mathbf{Z}(p)\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p\mapsto\mu} \mathbf{Z}(p^\infty)\Bigr). \tag{12}$$

Группа A входит в класс $\mathcal{T}(F)$ в том и только в том случае, когда фактор-группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является p-делимой для всех p, для которых $\psi^F(p) = \mu$, а сама группа A является p-делимой для всех p, для которых $\psi^F(p) = \lambda$ (в частности, все делимые группы заведомо являются $\mathrm{T}(F)$-группами). Тогда $\mathrm{W}_F(A)$ — это наибольшая подгруппа группы A, обладающая указанными свойствами (её можно найти как сумму всех таких подгрупп). Так, например, если F совпадает с прямой суммой $\bigoplus \mathbf{Z}(p)$ всех циклических групп простого порядка, то $\mathcal{T}(F)$ есть класс всех делимых групп и $\mathrm{W}_F = \mathbf{d}$.

Обратно, всякий класс абелевых групп указанного вида совпадает с классом $\mathcal{T}(F)$ для некоторой периодической группы F. Обозначим через $\mathcal{L}_2$ множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, порождаемых периодическими группами F. Выше нами было установлено взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{L}_2$ и множеством всех функций $\psi\colon P \to M_2$.

Введём на M_2 отношение порядка: $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$. Обозначим через M_2^P множество, которое состоит из всех последовательностей вида (8) с членами из M_2. На M_2^P вводится частичный порядок: $\alpha \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha_p \leqslant \beta_p$ для всех $p \in P$. Относительно этого порядка M_2^P является полной дистрибутивной решёткой.

Отображение $\varphi_2\colon \mathcal{L}_2 \to M_2^P$ определим по аналогии с (9):

$$\varphi_2(\mathrm{W}_F) = (\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \ldots, \psi^F(p), \ldots). \tag{13}$$

Как было показано выше, это отображение является биекцией.

Теорема 2.6. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_2$ является полной дистрибутивной решёткой, а отображение φ_2 — изоморфизмом решёток. Нулём решётки $\mathcal{L}_2$ служит радикал $\mathbf{d}$, единицей — радикал W_0.*

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2.3 достаточно доказать, что φ_2 есть изоморфизм частично упорядоченных множеств, т. е. показать равносильность неравенств $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$ и $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$ для периодических групп F и G. Наименьший и наибольший элементы $\mathcal{L}_2$ находятся в соответствии с определением отображения φ_2.

Пусть $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$. Это значит, что $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$ для любого простого числа p. Таким образом, $\mathcal{T}(F_p) \subseteq \mathcal{T}(G_p)$. Учитывая равенство (11), получаем, что $\mathcal{T}(F) \subseteq \mathcal{T}(G)$ и, следовательно, $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Обратно, пусть $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$. Предположим, что $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \nleqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$, т. е. существует такое простое число p, что $\psi^F(p) > \psi^G(p)$. Рассмотрим два случая.

1. $\psi^F(p) = \nu$, $\psi^G(p) \in \{\lambda, \mu\}$. Тогда $F_p = 0$, $G_p \neq 0$. Отсюда следует, что группа $\mathbf{Q}_p$ всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, входит в $\mathcal{T}(F)$, но не входит в $\mathcal{T}(G)$. Поэтому $\mathcal{T}(F) \nsubseteq \mathcal{T}(G)$.
2. $\psi^F(p) = \mu$, $\psi^G(p) = \lambda$. Тогда F_p есть ненулевая делимая группа, а группа G_p не является делимой. В этом случае $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$ и $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(G)$. Следовательно, включение $\mathcal{T}(F) \subseteq \mathcal{T}(G)$ не выполнено.

В обоих случаях мы получили, что $\mathrm{W}_F \nleqslant \mathrm{W}_G$, а это противоречит нашему предположению. Таким образом, $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$. □

Предложение 2.7. *Пусть группа F периодическая. Тогда W_F совпадает с радикалом H_V, где*

$$V = V(\psi^F) = \mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto \mu} \mathbf{Z}(p) \Big). \tag{14}$$

(*Если $\psi^F(p) = \nu$ для всех $p \in P$, то считаем, что $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} = \mathbf{Z}$.*)

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{W}_F(V) = V$. Поэтому $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{W}_F$. Пусть теперь $A \in \mathcal{T}(F)$. Это значит, что $B = A/\mathrm{H}_V(A) \in \mathcal{T}(F)$. Следовательно, группа B является p-делимой для всех p, для которых $\psi^F(p) = \lambda$. Кроме того, фактор-группа $B/\mathbf{t}(B)$ является p-делимой для всех p, для которых $\psi^F(p) = \mu$. С другой стороны, $B \in \mathcal{E}(V)$, так что $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$.

Пусть p — некоторое простое число. Рассмотрим три случая.

1. $\psi^F(p) = \lambda$. Тогда p-компонента B_p делима. Поскольку группа $\mathbf{Z}(p^\infty)$ является гомоморфным образом группы $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$, равенство $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ возможно лишь в случае $B_p = 0$.
2. $\psi^F(p) = \mu$. Если $B_p \neq 0$, то, очевидно, $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p), B_p) \neq 0$, а это противоречит равенству $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$. Следовательно, $B_p = 0$.

3. $\psi^F(p) = \nu$. Группа $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$ имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом. Поэтому из условия $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ следует, что $B_p = 0$.

Получили, что B — группа без кручения. Она является p-делимой для всех p, для которых $\psi^F(p) \in \{\lambda, \mu\}$. Поэтому равенство $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}, B) = 0$ возможно лишь при $B = 0$. Следовательно, $\mathrm{H}_V(A) = A$. Таким образом, $\mathrm{H}_V \geqslant \mathrm{W}_F$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Покажем, что аналог предложения 2.5 для $\mathcal{L}_2$ не выполняется.

Пример 2.8. Пусть $\rho_1 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(2)}$, $\rho_2 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(3)}$ и ρ есть объединение радикалов ρ_1 и ρ_2 в решётке $\mathcal{L}_2$. В этом случае

$$\varphi_2(\rho) = \varphi_2(\rho_1) \vee \varphi_2(\rho_2) = (\nu, \nu, \nu, \ldots).$$

Таким образом, ρ совпадает с радикалом W_0, т. е. $\rho(A) = A$ для любой группы A.

С другой стороны, из предложения 2.7 мы знаем, что ρ_1 и ρ_2 совпадают с радикалами H_V и H_U, где $V = \mathbf{Q}^{(2)}$, $U = \mathbf{Q}^{(3)}$. Поэтому объединение этих радикалов (в смысле (2)) есть $\mathrm{E}(V \oplus U)$-радикал, а он не равен ρ. Мы получили, что $\mathcal{L}_2$ не является подрешёткой «решётки» всех идемпотентных радикалов.

Предложения 2.4 и 2.7 показывают, что всякий Т-радикал можно представить в виде Е-радикала. Пусть отображение $\chi\colon M_1 \to M_2$ переводит элементы l, m и n соответственно в λ, μ и ν. Несложно заметить, что χ есть антиизоморфизм решёток. Он индуцирует антиизоморфизм решёток M_1^P и M_2^P и антиизоморфизм $\bar{\chi}\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

О некой двойственности Т-радикалов и Е-радикалов свидетельствует следующая теорема.

Теорема 2.9. *Пусть $\rho_1 \in \mathcal{L}_1$ и $\bar{\chi}(\rho_1) = \rho_2$. Тогда существуют такие группы F и G, что $\rho_1 = \mathrm{W}_F = \mathrm{H}_G$ и $\rho_2 = \mathrm{W}_G = \mathrm{H}_F$.*

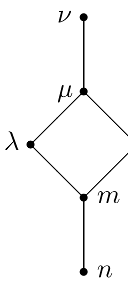
Доказательство. В силу рассуждений, проведённых в начале раздела, равенство $\rho_1 = \mathrm{W}_F$ будет выполняться, если положить

$$F = F(\psi) = \mathbf{Q}^{(lm)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{p \mapsto m} \mathbf{Z}(p)\Bigr),$$

где $\psi\colon P \to M_1$ — функция, соответствующая Т-радикалу ρ_1. Учитывая определение $\bar{\chi}$, получаем, что радикальный класс Т-радикала ρ_2 содержит в точности все те группы A, для которых фактор-группа $A/\mathbf{t}(A)$ является p-делимой при всех простых p, для которых $\psi(p) = m$, а сама группа A является p-делимой при всех p, для которых $\psi(p) = l$. Равенство $\rho_2 = \mathrm{W}_G$ выполнено, в частности, для группы

$$G = G(\psi) = \Bigl(\bigoplus_{p \mapsto l} \mathbf{Z}(p)\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p \mapsto m} \mathbf{Z}(p^\infty)\Bigr).$$

Сравнивая F и G с (14) и (10), получаем, что $\rho_1 = \mathrm{H}_G$ и $\rho_2 = \mathrm{H}_F$. Теорема доказана. $\square$



Введём обозначение $M = M_1 \cup M_2 = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$. Порядок, имеющийся на M_1 и M_2, дополним условиями $m \leqslant \lambda$ и $l \leqslant \mu$ (элементы l и λ считаем несравнимыми). Нетрудно видеть, что вводимое таким образом частично упорядоченное множество M является полной дистрибутивной решёткой. Более того, полной дистрибутивной решёткой является множество M^P всех последовательностей вида (8) с членами из множества M. Далее нас будет интересовать его подмножество $M' = M_1^P \cup M_2^P$. Оно является полной подрешёткой в M^P. В самом деле, объединение любого семейства элементов из M' входит в множество M_2^P, если туда входит хотя бы один из элементов семейства, и в M_1^P — в противном случае. Аналогичное утверждение справедливо и для пересечения. Следовательно, M' тоже полная дистрибутивная решётка.

Обозначим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Заметим, что $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \varnothing$. Действительно, радикальные классы T-радикалов из $\mathcal{L}_1$ содержат лишь периодические группы, в то время как в радикальный класс T-радикала из $\mathcal{L}_2$ входит по меньшей мере группа $\mathbf{Q}$. Для всякой группы F определена функция $\psi^F\colon P \to M$, при этом для непериодических групп имеет место включение $\psi^F(P) \subseteq M_1$, а для периодических — $\psi^F(P) \subseteq M_2$. Отображение $\varphi\colon \mathcal{L} \to M'$ определяется по аналогии с (9) и (13):

$$\varphi(\mathrm{W}_F) = (\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \ldots, \psi^F(p), \ldots).$$

На каждом из множеств $\mathcal{L}_i$ оно действует так же, как φ_i. Ясно, что отображение φ биективно.

Теорема 2.10. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$ является полной дистрибутивной решёткой, а отображение φ — изоморфизмом решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}$ служат радикалы $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}}$ и W_0 соответственно.*

Доказательство. Очевидно, что наименьший и наибольший элементы $\mathcal{L}$ совпадают соответственно с нулём и единицей «решётки» всех радикалов. Покажем эквивалентность неравенств $\varphi(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$ и $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Пусть $\varphi(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$, причём $\varphi(\mathrm{W}_F) \in M_i^P$, $\varphi(\mathrm{W}_G) \in M_j^P$. В теоремах 2.3 и 2.6 рассмотрен случай $i = j$; случай $i = 2$, $j = 1$ невозможен по определению порядка на M. Остаётся случай $i = 1$, $j = 2$. Для любого простого p имеем $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$. Пусть $A \in \mathcal{T}(F)$, тогда $A = \bigoplus A_p$. Рассмотрим теперь произвольное простое число p. Возможны два случая.

1. $\psi^F(p) = l$, $\psi^G(p) \in \{\mu, \nu\}$. Тогда p-компонента G_p делима. Поскольку группа G периодическая, отсюда следует $A_p \otimes G = 0$.
2. $\psi^F(p) \in \{m, n\}$. Это значит, что делимой является p-компонента A_p. Следовательно, $A_p \otimes G = 0$.

В обоих случаях получили, что $A_p \in \mathcal{T}(G)$. Поэтому $A \in \mathcal{T}(G)$. Таким образом, доказано включение $\mathcal{T}(F) \subseteq \mathcal{T}(G)$ и вместе с ним неравенство $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Обратно, пусть $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$, причём $\mathrm{W}_F \in \mathcal{L}_i$, $\mathrm{W}_G \in \mathcal{L}_j$. Случай $i = j$ рассмотрен ранее, случай $i = 2$, $j = 1$ невозможен (см. замечание перед теоремой).

Разберём случай $i = 1$, $j = 2$. Допустим, что $\varphi(\mathrm{W}_F) \not\leqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$. Это значит, что для некоторого простого числа p неравенство $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$ не выполнено. Такое возможно лишь в случае $\psi^F(p) = l$, $\psi^G(p) = \lambda$. Следовательно, группа F является p-делимой, а группа G — нет (поскольку делимой не является её p-компонента G_p). Поэтому $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$, $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(G)$. Таким образом, $\mathcal{T}(F) \not\subseteq \mathcal{T}(G)$, а это противоречит нашему предположению. Теорема доказана. □

Итак, нами получено описание всех Т-радикалов, действующих в категории абелевых групп, и образуемой ими решётки.

3. Пересечения Т-радикалов. Сервантные подгруппы

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы показать, что «решёточное» пересечение Т-радикалов совпадает с их «поточечным» пересечением, т. е. для произвольного разложения вида (3) и произвольной группы A справедливо равенство

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{W}_i(A). \tag{15}$$

Для этого нам потребуется ряд вспомогательных фактов.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения*:

а) *какова бы ни была группа F, класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно сервантных подгрупп*;

б) *если F — p-группа, то класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться известными свойствами сервантно точных последовательностей [7]

$$0 \to B \to A \to A/B \to 0, \tag{16}$$

$$0 \to B \otimes F \to A \otimes F \to (A/B) \otimes F \to 0: \tag{17}$$

а) если последовательность (16) сервантно точна, то индуцированная последовательность (17) также сервантно точна;

б) если последовательность (16) p-сервантно точна, то индуцированная последовательность (17) сервантно точна.

В обоих случаях из равенства $A \otimes F = 0$ сразу следует $B \otimes F = 0$. □

Теперь, чтобы доказать равенство (15), достаточно убедиться, что пересечение $B = \bigcap \mathrm{W}_i(A)$ сервантно в A. В этом случае группа B является сервантной подгруппой в каждой из групп $\mathrm{W}_i(A)$. Следовательно, по только что доказанной лемме имеем $B \in \mathcal{T}(F_i)$ для любого $i \in I$. Тогда из (4) можно сделать вывод, что B является $\mathrm{T}(F)$-группой. В силу очевидного включения $\mathrm{W}_F(A) \subseteq B$ отсюда следует (15).

Лемма 3.2 (Гарднер, [10]). *Каковы бы ни были идемпотентный радикал ρ и группа A, подгруппа $\rho(A)$ сервантна в A.*

Лемма 3.3. *Для произвольной p-группы A равенство* (15) *выполнено.*

Доказательство. Каждая из подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает по меньшей мере с одной из трёх подгрупп 0, $\mathbf{d}(A)$ или A (вообще говоря, в случае p-групп это справедливо и для произвольного идемпотентного радикала). Поэтому пересечение всех подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает с одной из этих подгрупп и, следовательно, сервантно в A. Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 3.4. *Для произвольной периодической группы A равенство* (15) *выполнено.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 3.3 к p-компонентам A_p группы A:

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigoplus_{p\in P} \mathrm{W}_F(A_p) = \bigoplus_{p\in P} \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A_p) = \bigcap_{i\in I} \bigoplus_{p\in P} \mathrm{W}_i(A_p) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A). \qquad \square$$

Лемма 3.5. *Если F — непериодическая группа, то равенство* (15) *справедливо для произвольной группы A.*

Доказательство. Если группа F непериодическая, то хотя бы одна из групп F_i также не является периодической, т. е. хотя бы одна из групп $\mathrm{W}_i(A)$ должна содержаться в $\mathbf{t}(A)$. Учитывая сделанное после леммы 2.2 замечание и пользуясь тем, что $\mathbf{t}$ является кручением, можем для произвольного $i \in I$ записать равенства

$$\mathrm{W}_i\big(\mathbf{t}(A)\big) = \mathbf{t}\big(\mathrm{W}_i(A)\big) = \mathrm{W}_i(A) \cap \mathbf{t}(A).$$

Применяя лемму 3.4, получаем

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A) = \left(\bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A)\right) \cap \mathbf{t}(A) = \bigcap_{i\in I} \big(\mathrm{W}_i(A) \cap \mathbf{t}(A)\big) = \\ = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i\big(\mathbf{t}(A)\big) = \mathrm{W}_F\big(\mathbf{t}(A)\big) \subseteq \mathrm{W}_F(A),$$

откуда сразу следует равенство (15). □

Осталось разобрать случай, когда группа F периодическая, $F = \bigoplus F_p$. Для удобства $\mathrm{T}(F_p)$-радикалы будем обозначать просто W_p.

Лемма 3.6. *Если F — периодическая группа, то для произвольной абелевой группы A справедливо равенство*

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное простое число q и рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi\colon A \to A/A_q$. Введём вспомогательные обозначения

$$B = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A), \quad C = \bigcap_{p\in P} (\mathrm{W}_p(A) + A_q).$$

Покажем, что $\pi(B) = C/A_q$. Для всякого простого числа p, отличного от q, имеем $A_q \otimes F_p = 0$, следовательно, $A_q \subseteq \bigcap\limits_{p\neq q} \mathrm{W}_p(A)$. Таким образом,

$$C = \bigcap_{p\in P} (\mathrm{W}_p(A) + A_q) = \Big(\bigcap_{p\neq q} \mathrm{W}_p(A)\Big) \cap (\mathrm{W}_q(A) + A_q) = \\ = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A) + A_q = B + A_q.$$

Отсюда $\pi(B) = C/A_q$. Докажем теперь следующий факт: если X — сервантная подгруппа группы A, то $\pi(X)$ — сервантная подгруппа фактор-группы A/A_q.

Предположим, что для элементов $x \in X$, $a \in A$ и натурального числа n выполнено равенство $x + A_q = n(a + A_q)$. Тогда $x = na + g$, где порядок элемента g равен q^k для некоторого $k \geqslant 0$. Отсюда получаем $q^k x = nq^k a$. Поскольку подгруппа X сервантна в A, можно заключить, что для некоторого $y \in X$ имеет место равенство $q^k x = nq^k y$. Из очевидного соотношения $x = ny+(x-ny)$ теперь следует, что $x + A_q = n(y + A_q)$. Итак, группа $\pi(X)$ действительно сервантна в фактор-группе A/A_q.

В частности, все группы $\pi\big(\mathrm{W}_p(A)\big)$ — сервантные подгруппы группы A/A_q. Далее, так как группа A/A_q имеет нулевую q-компоненту, пересечение любого семейства q-сервантных подгрупп из A/A_q является q-сервантной подгруппой. Поэтому подгруппа $C/A_q = \bigcap \pi\big(\mathrm{W}_p(A)\big)$ является q-сервантной в A/A_q и, в частности, в $\pi\big(\mathrm{W}_q(A)\big)$. Поскольку, очевидно, $\pi\big(\mathrm{W}_q(A)\big) \in \mathcal{T}(F_q)$, по лемме 3.1 получаем, что $C/A_q \in \mathcal{T}(F_q)$.

Итак, $\pi(B) \in \mathcal{T}(F_q)$. С другой стороны, $\pi(B) \cong B/\big(B \cap \mathbf{t}_q(A)\big)$. Учитывая тот факт, что для непериодических групп F равенство (15) уже доказано, несложно убедиться, что пересечение $B \cap \mathbf{t}_q(A)$ совпадает с $\mathrm{T}\big(F \oplus \mathbf{Q}^{(q)}\big)$-радикалом группы A, следовательно, $B \cap \mathbf{t}_q(A) \in \mathcal{T}(F_q)$. Поскольку класс $\mathcal{T}(F_q)$ замкнут относительно расширений, получаем, что $B \in \mathcal{T}(F_q)$. Приведённые нами рассуждения справедливы для любого простого q, и из (11) делаем вывод, что $B \in \mathcal{T}(F)$. Отсюда уже следует равенство $\mathrm{W}_F(A) = B$. □

Лемма 3.7. *Если F — p-группа, то равенство* (15) *выполнено для всякой группы A.*

Доказательство. Действительно, пусть (3) — какое-то прямое разложение группы F. Мы не будем исключать возможности, что некоторые прямые слагаемые в этом разложении равны нулю — в следующей лемме это позволит нам использовать данный результат без дополнительных оговорок. Каково бы ни было $i \in I$, функция $\psi^i\colon P \to M_2$, соответствующая радикалу W_i, равна ν при любом значении своего аргумента (быть может, кроме значения аргумента, равного p). Следовательно, множество $\{\mathrm{W}_i\}_{i\in I}$ является линейно упорядоченным и содержит не более трёх различных элементов. Пусть W_j — наименьший из этих элементов. Тогда пересечение всех подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает с $\mathrm{W}_j(A)$ и потому сервантно в A. Отсюда получаем требуемое утверждение. □

Лемма 3.8. *Если F — периодическая группа, то равенство* (15) *справедливо для всякой группы A.*

Доказательство. Пусть $F_i = \bigoplus F_{ip}$ — разложения прямых слагаемых группы F на p-компоненты. В этом случае p-компоненты самой группы F имеют вид $F_p = \bigoplus\limits_{i\in I} F_{ip}$. По леммам 3.6 и 3.7 получаем, что

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_{ip}(A) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A)$$

(через W_{ip} мы обозначили $\mathrm{T}(F_{ip})$-радикалы). Лемма доказана. □

Результаты последних лемм суммирует следующая теорема.

Теорема 3.9. *Если $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, то для всякой группы A выполнено $\mathrm{W}_F(A) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{W}_i(A)$.*

Следствие 3.10. *Если $F = G \oplus H$, то $\mathrm{W}_G\big(\mathrm{W}_H(A)\big) = \mathrm{W}_F(A)$ для всякой группы A.*

Для доказательства данного следствия достаточно воспользоваться очевидными соотношениями

$$\mathrm{W}_F(A) \subseteq \mathrm{W}_G\big(\mathrm{W}_H(A)\big) \subseteq \mathrm{W}_G(A) \cap \mathrm{W}_H(A).$$

В заключение докажем критерий, характеризующий $\mathrm{T}(F)$-радикалы с точки зрения свойств замкнутости их радикальных классов. Описание идемпотентных радикалов, радикальные классы которых замкнуты относительно сервантных подгрупп, с точки зрения E-радикалов несколько иным путём дал Гарднер [9].

Теорема 3.11. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Радикальный класс R_ρ замкнут относительно сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда существует такая группа F, что $\rho = \mathrm{W}_F$.*

Доказательство. С учётом леммы 3.1 нам достаточно доказать импликацию в одну сторону. Пусть класс R_ρ замкнут относительно сервантных подгрупп. Если $\rho \leqslant \mathbf{t}$, то радикал ρ имеет вид (7) [3, 8] и, следовательно, представи́м в виде $\mathrm{T}(F)$-радикала.

Пусть теперь $\rho \nleqslant \mathbf{t}$, т. е. в классе R_ρ есть непериодические группы. Определим функцию $\psi\colon P \to M_2$ следующим образом:

$$\psi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \notin R_\rho, \\ \mu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \notin R_\rho \text{ и } \mathbf{Z}(p) \in R_\rho, \\ \nu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \in R_\rho. \end{cases}$$

Положим $\rho' = \mathrm{W}_F$, где F задаётся формулой (12).

Покажем сначала, что $\rho \leqslant \rho'$. Пусть $A \in R_\rho$, тогда по лемме 2.2 получаем, что $\mathbf{t}(A) \in R_\rho$ и $A/\mathbf{t}(A) \in R_\rho$. Рассмотрим теперь произвольное простое число p. Если $\psi(p) \in \{\mu, \nu\}$, то $A_p \otimes F = 0$. Если же $\psi(p) = \lambda$, то группа A_p делима (в противном случае из $A_p \in R_\rho$ следовало бы $\mathbf{Z}(p) \in R_\rho$, что противоречит выбору функции ψ), поэтому $A_p \otimes F = 0$. В обоих случаях $A_p \in \mathcal{T}(F)$, следовательно, периодическая часть $\mathbf{t}(A)$ группы A также W_F-радикальна.

Обозначим $B = A/\mathbf{t}(A)$. Предположим, что $B \notin \mathcal{T}(F)$. Тогда существует простое число p, такое что $\psi(p) \in \{\lambda, \mu\}$ и группа B не является p-делимой. В этом случае B содержит элемент b, имеющий конечную p-высоту. Нетрудно видеть, что тогда $\langle b\rangle_*$ (наименьшая сервантная подгруппа группы B, содержащая элемент b) вкладывается в группу $\mathbf{Q}_p$. С другой стороны, $\langle b\rangle_* \in R_\rho$, откуда следует $\rho(\mathbf{Q}_p) \neq 0$. Поскольку $\rho(\mathbf{Q}_p)$ есть сервантная подгруппа группы $\mathbf{Q}_p$, получаем $\rho(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$, что противоречит условию $\psi(p) \neq \nu$. Итак, мы показали, что $B \in \mathcal{T}(F)$ и, следовательно, $A \in \mathcal{T}(F)$. Из включения $R_\rho \subseteq \mathcal{T}(F)$ получаем неравенство $\rho \leqslant \mathrm{W}_F$.

Докажем теперь, что $\rho \geqslant \rho'$. Сначала убедимся, что $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \in R_\rho$. Если множество всех простых чисел p, для которых $\psi(p) = \nu$, пусто, то $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} = \mathbf{Q}$, а делимые группы ρ-радикальны для всех радикалов ρ, таких что $\rho \nleqslant \mathbf{t}$ [10]. Предположим теперь, что это множество не является пустым. Обозначим

$$A = \prod_{p\mapsto\nu} \mathbf{Q}_p, \quad B = \bigoplus_{p\mapsto\nu} \mathbf{Q}_p \leqslant A.$$

Каково бы ни было простое число p, все сомножители группы A (кроме, быть может, одного) являются p-делимыми. Поэтому группа A/B делима (при этом не исключено, что она равна нулю). Как уже отмечалось выше, отсюда непосредственно следует, что $A/B \in R_\rho$. Поскольку, очевидно, $B \in R_\rho$, получаем, что $A \in R_\rho$. Множество A' элементов группы A, все координаты которых равны между собой, является сервантной подгруппой в A. Ясно, что эта подгруппа изоморфна $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$. Таким образом, $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \in R_\rho$.

Для любого простого числа p, такого что $\psi(p) = \mu$, имеем $\mathbf{Z}(p) \in R_\rho$. Следовательно, группа V, задаваемая равенством (14), входит в класс R_ρ. Это значит, что $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$. Из предложения 2.7 получаем $\mathrm{H}_V = \rho'$. Итак, $\rho = \rho'$, что завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинёв: Штиинца, 1983.

[2] Крылов П. А., Приходовский М. А. Обобщённые Т-модули и Е-модули // Универсальная алгебра и её приложения: Тр. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л. А. Скорнякова. Волгоград, 6—11 сентября 1999 г. — Волгоград: Перемена, 1999. — С. 153—169.

[3] Курош А. Г. Радикалы в теории групп // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 912—931.

[4] Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. — М.: Наука, 1969.
[5] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1970.
[6] Тимошенко Е. А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 1. — С. 201—210.
[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974. — Т. 1.
[8] Dickson S. E. On torsion classes of Abelian groups // J. Math. Soc. Japan. — 1965. — Vol. 17, no. 1. — P. 30—35.
[9] Gardner B. J. Torsion classes and pure subgroups // Pacific J. Math. — 1970. — Vol. 33, no. 1. — P. 109—116.
[10] Gardner B. J. Two notes on radicals of Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1972. — Vol. 13, no. 3. — P. 419—430.
[11] Pierce R. S. E-modules // Abelian Group Theory, Proc. 4th Conf., Perth, 1987. — Amer. Math. Soc., 1989. — P. 221—240. — (Contemp. Math.; Vol. 87).
[12] Timoshenko E. A. T-radicals in the category of modules // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 85, no. 1—3. — P. 297—303.

Статья поступила в редакцию в мае 2006 г.