Министерство образования и науки Российской Федерации

Томский государственный университет

На правах рукописи

УДК 512.553+512.541

ТИМОШЕНКО Егор Александрович

Т-РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук,

профессор Крылов П. А.

Томск — 2005

Оглавление

Основные обозначения **3**

Введение **4**

ГЛАВА I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ **15**

§1. Из теории радикалов модулей 16

§2. Основные свойства функторов $\otimes$ и Hom 22

§3. $\mathrm{T}(F)$-радикалы и $\mathrm{E}(V)$-радикалы 26

ГЛАВА II. Т-РАДИКАЛЫ И Е-РАДИКАЛЫ **32**

§4. $\mathrm{T}(e)$-модули, $\mathrm{E}(e)$-модули
и связанные с ними радикалы 33

§5. $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули над факторкольцом 42

**ГЛАВА III. $\mathrm{T}(\boldsymbol{F})$-РАДИКАЛЫ
В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП** **46**

§6. $\mathrm{T}(F)$-радикалы абелевых групп
и образуемая ими решётка 47

§7. Свойства замкнутости классов $\mathrm{T}(F)$-групп 62

§8. «Решёточное» и «поточечное»
пересечения $\mathrm{T}(F)$-радикалов 69

Литература **74**

Основные обозначения

R, S	кольца
A_S, ${}_SB$	некоторые правый и левый модули над кольцом S
${}_RA_S$	R-S-бимодуль A
$\bigoplus$, $\prod$	прямая сумма, прямое произведение
A/B	фактормодуль модуля A по подмодулю B
$\subset$	включение (не обязательно строгое)
p	некоторое простое число
P	множество всех простых чисел
$\mathbf{Z}$	кольцо (и группа) целых чисел
$\mathbf{Z}(n)$	циклическая группа порядка n
$\mathbf{Z}(p^\infty)$	квазициклическая группа
$\mathbf{Q}$	группа рациональных чисел
$\mathbf{Q}_p$	группа рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p
$\mathbf{Q}^{(p)}$	группа рациональных чисел, знаменателями которых являются степени числа p
$\mathbf{t}(A)$	периодическая часть группы A
A_p или $\mathbf{t}_p(A)$	p-компонента группы A
$\mathbf{d}(A)$	наибольшая делимая подгруппа группы A
$A \otimes_S B$	тензорное произведение модулей A_S и ${}_SB$ над кольцом S
$A \otimes B$	тензорное произведение групп A и B
$\mathrm{Hom}_S(A, B)$	группа S-гомоморфизмов из модуля A_S в модуль B_S
$\mathrm{Hom}(A, B)$	группа гомоморфизмов из группы A в группу B
mod-S, S-mod	категории правых и левых S-модулей (а также классы объектов этих категорий)
$\mathrm{Im}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$	образ и ядро гомоморфизма φ

Введение

Актуальность темы. При рассмотрении алгебраических систем основной задачей является построение структурной теории. Структурные теоремы сводят изучение алгебраических систем к изучению «более просто устроенных». Одну из конструкций, осуществляющих подобное сведение, представляет радикал. С тех пор, как в 1950-х гг. Курош [7] и Амицур [16] ввели понятие радикала для колец и алгебр, теория радикалов распространилась и на другие алгебраические структуры, в числе которых модули и группы.

Радикалы позволяют выделять классы модулей, обладающих различными свойствами, проводить их классификацию и дальнейшее более детальное изучение. На зрелость направления, связанного с радикалами модулей, указывает наличие заметного количества монографий по этой теме (Мишина и Скорняков [9], Кашу [3, 4], Ламбек [27], Голан [23] и ряд других). Во многих работах отечественных и зарубежных алгебраистов (Курош, Рябухин, Гарднер, Диксон и др.) рассматривались радикалы абелевых групп (т.е. модулей над кольцом целых чисел).

С другой стороны, интенсивно изучаются взаимосвязи между свойствами модулей и абелевых групп. К данному направлению относятся работы о E-кольцах и E-модулях. Первое из этих понятий появилось в 1973 г. в статье [30]: E-*кольцами* были названы кольца R, для которых $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}(R,R)$. Позже это определение было распространено на модули: E-*модуль* A_R задаётся равенством $\mathrm{Hom}_R(R,A) = \mathrm{Hom}(R,A)$. E-модули впервые появились в [17], где они были названы R-группами. Одной из самых полных работ, посвящённых E-модулям, является [28]. Применения E-колец и E-модулей в теории абелевых групп весьма разнообразны; в книге [6] содержится обзор наиболее важных результатов, связанных с данной проблематикой.

Многие современные исследования посвящены тензорным произведениям модулей и абелевых групп. Тензорное произведение $\otimes$ является вторым по важности (после Hom) функтором категории модулей. До сих пор актуальной проблемой остаётся описание тензорных произведений модулей и абелевых групп. В работах Крылова и Приходовского [5, 10] введено понятие $\mathrm{T}(e)$-модуля, определяемое следующим образом. Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, тогда всякий R-модуль можно естественным образом превратить в притягивающий S-модуль. Модуль A_R называется $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если имеет место канонический изоморфизм $A \otimes_S R \cong A \otimes_R R$. Параллельно в тех же работах изучались $\mathrm{E}(e)$-*модули*, задаваемые равенством $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$ и в некотором смысле двойственные $\mathrm{T}(e)$-модулям.

В диссертации вводится «обобщённый» E-радикал. Это понятие в определённом смысле сводит воедино аналогичный радикал, рассматривавшийся Пирсом в [28], и $\mathrm{E}(e)$-модули из работ [5, 10]. Двойственным образом определяется T-радикал. Кроме того, рассматриваются близкие (как станет ясно из результатов второй главы) к этим двум радикалам понятия «$\mathrm{T}(F)$-радикал» и «$\mathrm{E}(V)$-радикал», в том или ином виде ранее встречавшиеся в работах, связанных с радикалами модулей.

Настоящая диссертация посвящена исследованию $\mathrm{T}(F)$-радикалов и T-радикалов. Работа также содержит ряд результатов, связанных с $\mathrm{E}(V)$-радикалами и E-радикалами. Во-первых, это помогает лучше продемонстрировать двойственность между соответствующими объектами, а во-вторых, $\mathrm{E}(V)$-радикалы в силу своей многочисленности являются удобным и подчас незаменимым инструментом при проведении доказательств. Исследование развивается по двум основным направлениям:

- поиск взаимосвязи между T-радикалами и $\mathrm{T}(F)$-радикалами;
- изучение $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп.

Цель работы: исследовать взаимосвязь между T-радикалами и T(F)-радикалами (а также между E-радикалами и E(V)-радикалами); изучить свойства T(F)-радикалов категории абелевых групп и описать частично упорядоченное множество, которое эти радикалы образуют.

Научная новизна и практическая ценность. Основные результаты настоящей диссертационной работы являются новыми. К основным результатам работы можно отнести следующие.

- Показано, что существуют модули ${}_RG$ и ${}_SF$, для которых T-радикал совпадает с T(G)-радикалом, а также с сужением T(F)-радикала на категорию mod-R (предложения 4.5, 4.6). Если S — коммутативное кольцо, то всякий T(F)-радикал категории mod-S, в свою очередь, можно представить в виде T-радикала (теорема 4.14). Аналогичные результаты имеют место для E-радикалов (предложения 4.9 и 4.10, теорема 4.14).

- Описаны все T(F)-радикалы категории mod-$\mathbf{Z}$, выяснено строение образуемой ими решётки (§6).

- Доказано, что радикальный класс идемпотентного радикала категории mod-$\mathbf{Z}$ замкнут относительно сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда этот радикал совпадает с T(F)-радикалом для некоторой группы F (теорема 7.5).

- Установлено, что «решёточное» пересечение T(F)-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ совпадает с их «поточечным» пересечением (§8).

Результаты работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях по теории модулей и абелевых групп.

Апробация результатов. Основные результаты настоящей диссертации докладывались на международных конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2001 и 2005 гг.), «Алгебра и её приложения» (Красноярск, 2002 г.), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2002 г.), «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004 г.), Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003 г.) и Всероссийском симпозиуме «Абелевы группы» (Бийск, 2005 г.) и были опубликованы в работах [32] – [42]. Кроме того, они докладывались на семинарах кафедры алгебры Томского государственного университета.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, списка литературы и списка обозначений. Главы I и III содержат по три параграфа, глава II — два параграфа. Работа изложена на 77 страницах.

Содержание работы. Во введении обосновывается актуальность выбранного направления научного исследования и излагаются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава I содержит предварительные сведения и общие результаты, используемые в последующих главах. В §1 приводятся основные определения и факты из теории радикалов модулей. §2 содержит ряд свойств функторов $\otimes$ и Hom, играющих в работе ключевую роль. В §3 вводятся основные исследуемые объекты: $\mathrm{T}(F)$-радикал W_F и $\mathrm{E}(V)$-радикал H_V, нейтрализатор n_F и след tr_V; устанавливаются некоторые связанные с этими объектами общие факты, имеющие и самостоятельный интерес.

Приведём основные определения. Зафиксируем S-модули ${}_SF$ и V_S. Через $\mathrm{W}_F(A)$ обозначается сумма всех подмодулей B модуля A таких, что $B \otimes_S F = 0$; через $\mathrm{H}_V(A)$ — пересечение всех подмодулей B модуля A, для которых $\mathrm{Hom}_S(V, A/B) = 0$. Получающиеся радикалы W_F и H_V назовём $\mathrm{T}(F)$-*радикалом* и $\mathrm{E}(V)$-*радикалом* соответственно.

Определение 3.5. Пусть A_S — модуль. Его F-*нейтрализатором* называется множество всех $a \in A$ таких, что в тензорном произведении $A \otimes_S F$ для всякого $f \in F$ выполнено равенство $a \otimes_S f = 0$. Обозначим это множество $\mathrm{n}_F(A)$. Возникающий при этом предрадикал n_F мы также будем называть (F-)нейтрализатором.

Определение 3.8. Пусть A_S — модуль. V*-следом* в этом модуле называется сумма образов всех S-модульных гомоморфизмов $\varphi\colon V \to A$. Обозначим эту сумму $\mathrm{tr}_V(A)$. Возникающий при этом предрадикал tr_V мы также будем называть (V-)следом.

(Для удобства выбрано обозначение, несколько отличающееся от того, что принято, например, в [12].)

Последние два результата параграфа показывают, как связанные с идемпотентными радикалами категории mod-S решёточные операции действуют на $\mathrm{T}(F)$-радикалы и $\mathrm{E}(V)$-радикалы.

Предложение 3.12. *Пусть даны S-модули ${}_SF$ и V_S и их прямые разложения* $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, $V = \bigoplus\limits_{j\in J} V_j$. *Тогда*

(а) $\bigwedge\limits_{i\in I} \mathrm{W}_{F_i} = \mathrm{W}_F$;

(б) $\bigvee\limits_{j\in J} \mathrm{H}_{V_j} = \mathrm{H}_V$.

Следствие 3.13. *Если совокупность всех* $\mathrm{T}(F)$*-радикалов категории* mod-S *образует множество, то относительно естественного порядка предрадикалов это множество является полной решёткой.*

В §6 будет показано, что описанная в данном следствии ситуация имеет место, в частности, в категории mod-$\mathbf{Z}$.

В главе II исследуются $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули (в смысле [5, 10]) и определяемые с их помощью T-радикал W и E-радикал H. В §4 устанавливаются некоторые связи между этими радикалами и радикалами, которые вводились в §3. В ситуации, когда дан кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$, всякий R-модуль можно естественным образом превратить в S-модуль.

Пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. R-модуль A назовём $\mathrm{T}(e)$*-модулем*, если канонический эпиморфизм $A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ — изоморфизм. Модуль A называется $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, если выполнено условие $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Определение 4.3. T-*радикалом* модуля A_R назовём сумму $\mathrm{W}(A)$ всех его подмодулей B таких, что B есть $\mathrm{T}(e)$-модуль.

Определение 4.7. E-*радикалом* модуля A_R назовём пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех его подмодулей B таких, что A/B есть $\mathrm{E}(e)$-модуль.

Если ${}_SF = R/e(S)$, то для удобства пишем $\mathrm{n} = \mathrm{n}_F$. Очевидно, что $\mathrm{n}(A)$ является S-подмодулем в A. Верно и более сильное утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть A — R-модуль. Тогда нейтрализатор $\mathrm{n}(A)$ является его подмодулем.*

При помощи этой теоремы доказывается следующий результат.

Предложение 4.5. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A)$.*

Кроме того, для левого R-модуля $G = R \otimes_S F$ выполняется

Предложение 4.6. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства $\mathrm{n}(A) = \mathrm{n}_G(A)$ и $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A)$.*

Таким образом, для подходящих модулей ${}_RG$ и ${}_SF$ можно утверждать, что T-радикал совпадает с $\mathrm{T}(G)$-радикалом категории mod-R, а также с сужением $\mathrm{T}(F)$-радикала категории mod-S на её подкатегорию mod-R. Аналогичные результаты справедливы и для E-радикала. Ниже используются обозначения $V_S = R/e(S)$, $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_V$, $U_R = V \otimes_S R$. Имеем следующий аналог теоремы 4.4.

Теорема 4.8. *Пусть A — R-модуль. Тогда след $\mathrm{tr}(A)$ является его подмодулем.*

Предложение 4.9. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_V(A)$.*

Предложение 4.10. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}_U(A)$ и $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A)$.*

Учитывая предложения 4.5 и 4.9, получаем следующую теорему.

Теорема 4.11. *Значения* T*-радикала и* E*-радикала произвольного модуля* A_R *однозначно определяются его* S*-модульной структурой.*

Последние два результата параграфа свидетельствуют о том, что утверждения предложений 4.5 и 4.9 при определённых дополнительных условиях можно обратить.

Предложение 4.13. *Пусть* S *— кольцо,* ${}_SF_S$ *— бимодуль. Тогда существуют кольцо* R *и гомоморфизм* $e\colon S \to R$ *такие, что бимодуль* $R/e(S)$ *изоморфен бимодулю* F.

При помощи этого предложения доказывается

Теорема 4.14. *Пусть* S *— коммутативное кольцо. Тогда всякий* $\mathrm{T}(F)$*-радикал (*$\mathrm{E}(V)$*-радикал) категории* $\text{mod-}S$ *имеет вид* T*-радикала (соответственно* E*-радикала) для подходящего кольца* R *и вложения* $e\colon S \to R$.

В §5 дополнительно рассматриваются $\mathrm{T}(\overline{e})$-модули и $\mathrm{E}(\overline{e})$-модули, где $\overline{e}$ есть композиция e и естественного гомоморфизма колец $R \to \overline{R}$ ($\overline{R} = R/I$ — некоторое факторкольцо кольца R), а также связанные с такими модулями радикалы.

Теорема 5.1. *Пусть* A *— модуль над кольцами* R *и* $\overline{R}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) A *—* $\mathrm{T}(e)$*-модуль;*

2) A *—* $\mathrm{T}(\overline{e})$*-модуль, причём* $I \subset \mathrm{n}_A(R)$.

Следствие 5.2. *Пусть* A *— модуль над кольцами* R *и* $\overline{R}$. *Тогда* $\mathrm{W}(A) \subset \overline{\mathrm{W}}(A)$.

Теорема 5.3. *Пусть* A *— модуль над кольцами* R *и* $\overline{R}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) A *—* $\mathrm{E}(e)$*-модуль;*

2) A *—* $\mathrm{E}(\overline{e})$*-модуль, причём* $I \subset \bigcap\bigl\{\operatorname{Ker}\varphi \bigm| \varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)\bigr\}$.

Следствие 5.4. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Тогда $\overline{\mathrm{H}}(A) \subset \mathrm{H}(A)$.*

Глава III посвящена изучению $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп. В §6 даётся описание всех таких радикалов и решётки, которую они образуют. Для этого отдельно рассматриваются непериодические и периодические группы F. Символами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{d}$ обозначаются предрадикалы, сопоставляющие всякой группе соответственно её периодическую часть и наибольшую делимую подгруппу; P — множество всех простых чисел.

В качестве вспомогательного инструмента используется трёхэлементная цепь $M_1 = \{l, m, n\}$, где $n < m < l$. Для всякой непериодической группы F можно определить функцию $\psi^F\colon P \to M_1$, полагая

$$\psi^F(p) = \begin{cases} l, & \text{если группа } F \text{ является } p\text{-делимой;} \\ m, & \text{если группа } F \text{ не является } p\text{-делимой,} \\ & \qquad \text{а факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ является;} \\ n, & \text{если факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ не является } p\text{-делимой.} \end{cases}$$

Через $\mathcal{L}_1$ обозначается множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, порождаемых непериодическими группами F; через M_1^P — множество, состоящее из всех последовательностей вида

$$\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_p, \dots), \tag{12}$$

члены которых занумерованы простыми числами и принадлежат M_1. Отображение $\varphi_1\colon \mathcal{L}_1 \to M_1^P$ задаётся равенством

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) = \bigl(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\bigr).$$

Теорема 6.3. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_1$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_1 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_1$ служат радикалы $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ и $\mathbf{t}$ соответственно.*

Пусть $M_2 = \{\lambda, \mu, \nu\}$ — ещё одна цепь из трёх элементов, причём $\lambda < \mu < \nu$. Функция $\psi^F\colon P \to M_2$ (для удобства функции $P \to M_2$ и $P \to M_1$ обозначены одинаково; это не вызывает путаницы, так как в одном случае группа F периодическая, а в другом — нет) строится так:

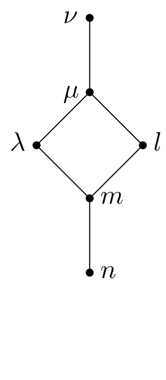
$$\psi^F(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p\text{-компонента } F_p \text{ не является делимой;} \\ \mu, & \text{если } F_p \text{ — ненулевая делимая группа;} \\ \nu, & \text{если } F_p = 0. \end{cases}$$

Через $\mathcal{L}_2$ обозначается множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, которые порождаются периодическими группами F; через M_2^P — множество, состоящее из всех последовательностей вида (12) с членами из M_2. Отображение $\varphi_2\colon \mathcal{L}_2 \to M_2^P$ определяется по аналогии с φ_1:

$$\varphi_2(\mathrm{W}_F) = \big(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\big).$$

Теорема 6.6. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_2$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_2 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_2$ служат радикалы* $\mathbf{d}$ *и* $\mathrm{W}_0 = 1$ *соответственно.*

Далее рассматривается частично упорядоченное множество $M = M_1 \cup M_2 = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$ (предполагается, что $m < \lambda$ и $l < \mu$, а элементы l и λ несравнимы). Подмножество $\mathcal{M} = M_1^P \cup M_2^P$ множества M^P есть полная дистрибутивная решётка. Биекция $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ из множества $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп в множество $\mathcal{M}$ строится как продолжение биекций $\varphi_i\colon \mathcal{L}_i \to M_i^P$, т.е.



$$\varphi(\mathrm{W}_F) = \big(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\big).$$

Теорема 6.10. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ есть изоморфизм* *решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}$ служат радикалы* $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ *и* $\mathrm{W}_0 = 1$ *соответственно.*

Последний результат параграфа показывает, насколько «плотно» радикалы W_F расположены в *большой решётке* $\mathcal{IR}$ (она отличается от обычной решётки тем, что элементы $\mathcal{IR}$ не образуют множество) всех идемпотентных радикалов категории абелевых групп.

Предложение 6.12. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Тогда*
(а) если $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d}$, то $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d}$;
(б) если $\mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$;
(в) если $\rho \leqslant \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{l, m, n\}$;
(г) если $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{\lambda, \mu\}$.

В §7 рассматриваются различные свойства замкнутости классов $\mathcal{T}(F)$ всех $\mathrm{T}(F)$-групп. Так, доказывается эквивалентность

$$\mathrm{n}_F \text{ — кручение} \iff \mathrm{W}_F \text{ — кручение.}$$

Предложение 7.2. *Пусть F — абелева группа. Эквивалентны следующие условия:*
1) n_F — кручение;
2) W_F — кручение;
3) $\psi^F(P) \subset \{l, n, \nu\}$.

Символом $\mathcal{R}(\rho)$ обозначается *радикальный класс* идемпотентного радикала ρ — класс всех абелевых групп (в общем случае — модулей) A таких, что имеет место равенство $\rho(A) = A$. Главным результатом параграфа является

Теорема 7.5. *Для идемпотентного радикала $\rho \in \mathcal{IR}$ следующие условия эквивалентны:*
1) класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно сервантных подгрупп;

2) $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно рациональных сервантных подгрупп;

3) существует группа F такая, что $\rho = \mathrm{W}_F$.

Из данной теоремы следует любопытный факт общего характера, касающийся тензорных произведений абелевых групп.

Следствие 7.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный класс абелевых групп, $\mathcal{R}$ — класс всех групп A, для которых $A \otimes F = 0$ при всех $F \in \mathcal{F}$. Тогда существует группа F_0 такая, что $\mathcal{R} = \mathcal{T}(F_0)$.*

В §8 установлено, что «решёточное» (см. также предложение 3.12) пересечение $\mathrm{T}(F)$-радикалов и их «поточечное» («точки» — это абелевы группы) пересечение суть одно и то же, т.е. доказана

Теорема 8.7. *Пусть A, F — произвольные абелевы группы. Если $F = \bigoplus\limits_{i \in I} F_i$, то $\mathrm{W}_F(A) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{W}_{F_i}(A)$.*

Следствие 8.8. *Если $F = G \oplus H$, то для произвольной группы A справедливо равенство $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(\mathrm{W}_H(A))$. В частности, любые два* Т*-радикала категории абелевых групп коммутируют друг с другом.*

Автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Крылову Петру Андреевичу за постановку задач, внимание к работе и помощь в оформлении диссертации.

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Первая глава носит предварительный характер. В §1 приводятся основные определения (предрадикал, радикал, идемпотентность и т.п.) и результаты теории радикалов, а также некоторые факты, касающиеся радикалов абелевых групп. В §2 собраны основные свойства функторов $\otimes$ и Hom, при помощи которых определяются изучаемые в настоящей работе радикалы, и связанных с этими функторами точных последовательностей. В §3 даются определения $\mathrm{T}(F)$-радикала и $\mathrm{E}(V)$-радикала, рассматриваются их основные свойства. Устанавливаются связи между этими радикалами и понятиями F-нейтрализатора и V-следа.

Все встречающиеся в работе кольца — ассоциативные с единицей, модули — унитарные и, если не оговорено обратное, правые. Термин «группа» используется как синоним понятия «абелева группа».

§1. Из теории радикалов модулей

Прежде всего нам потребуется ряд определений и общих фактов, касающихся теории радикалов [3, 31].

Определение 1.1. Пусть каждому S-модулю A поставлен в соответствие его подмодуль $\rho(A)$. Будем говорить, что ρ — *предрадикал* в категории mod-S, если для любого модульного гомоморфизма $\varphi\colon B \to A$ справедливо включение $\varphi(\rho(B)) \subset \rho(A)$.

Предложение 1.2 [3]. *Если ρ — предрадикал категории* mod-S *и $\{A_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство S-модулей, то*

$$\rho\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big) = \bigoplus_{i\in I} \rho(A_i).$$

Пусть ρ — предрадикал. Модули A, для которых выполнено условие $\rho(A) = A$, назовём *ρ-радикальными*; модули, задаваемые равенством $\rho(A) = 0$, — *ρ-полупростыми.* Через $\mathcal{R}(\rho)$ и $\mathcal{P}(\rho)$ мы будем обозначать классы всех ρ-радикальных и ρ-полупростых модулей соответственно.

Рассмотрим следующие (возможные) свойства предрадикала ρ.

P1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого модуля A.

P1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого модуля A.

P2. $\rho(B) = B \cap \rho(A)$ для любого модуля A и $B \subset A$.

Определение 1.3. Предрадикал ρ называется:

— *идемпотентным*, если он удовлетворяет условию P1;

— *радикалом*, если он удовлетворяет условию P1*;

— *идемпотентным радикалом*, если выполнены условия P1 и P1*;

— *кручением*, если выполнены условия P2 и P1*.

Легко видеть, что кручение обязательно является идемпотентным радикалом. Заметим также, что идемпотентный радикал удовлетворяет условию P2 тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{R}(\rho)$ обладает свойством замкнутости относительно подмодулей.

Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ — некоторые классы S-модулей. Предрадикалы $\rho^{\mathcal{R}}$ и $\rho_{\mathcal{P}}$ зададим равенствами

$$\rho^{\mathcal{R}}(A) = \sum\{B \subset A \mid B \in \mathcal{R}\},$$
$$\rho_{\mathcal{P}}(A) = \bigcap\{B \subset A \mid A/B \in \mathcal{P}\}.$$

Назовём последовательность модулей и гомоморфизмов вида

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

точной, если $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$, а α и β — соответственно мономорфизм и эпиморфизм. Если существует точная последовательность вида (1), то говорят, что модуль A — *расширение* модуля B при помощи модуля C. Заметим, что в этом случае $C \cong A/\operatorname{Im}\alpha$ и $B \cong \operatorname{Im}\alpha$.

Теорема 1.4 [3]. *(а) Пусть класс S-модулей $\mathcal{R}$ замкнут относительно гомоморфных образов и прямых сумм. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) $\rho^{\mathcal{R}}$ — идемпотентный радикал;
2) класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно расширений.

(б) Пусть класс S-модулей $\mathcal{P}$ замкнут относительно подмодулей и прямых произведений. Тогда следующие условия эквивалентны:
1) $\rho_{\mathcal{P}}$ — идемпотентный радикал;
2) класс $\mathcal{P}$ замкнут относительно расширений.

Радикальным называется класс модулей, замкнутый относительно прямых сумм, гомоморфных образов и расширений; *полупростым* называется класс модулей, замкнутый относительно прямых произведений, подмодулей и расширений. Следующий результат устанавливает связь между идемпотентными радикалами и классами модулей.

Предложение 1.5 [3]. *(а) Класс модулей $\mathcal{R}$ радикален тогда и только тогда, когда он имеет вид $\mathcal{R}(\rho)$ для некоторого идемпотентного радикала ρ категории* mod-S. *Сопоставления $\mathcal{R} \rightsquigarrow \rho^{\mathcal{R}}$ и $\rho \rightsquigarrow \mathcal{R}(\rho)$*

определяют взаимно однозначное соответствие между радикальными классами и идемпотентными радикалами категории mod-S.

(б) Класс модулей $\mathcal{P}$ полупрост тогда и только тогда, когда он имеет вид $\mathcal{P}(\rho)$ для некоторого идемпотентного радикала ρ категории mod-S. *Сопоставления $\mathcal{P} \rightsquigarrow \rho_{\mathcal{P}}$ и $\rho \rightsquigarrow \mathcal{P}(\rho)$ определяют взаимно однозначное соответствие между полупростыми классами и идемпотентными радикалами категории* mod-S.

Нетрудно видеть, что предрадикалы можно естественным образом частично упорядочить: будем считать, что $\rho \leqslant \rho'$ в том и только в том случае, когда $\rho(A) \subset \rho'(A)$ для любого модуля A.

Возьмём произвольный предрадикал ρ. Для каждого ординала α мы сопоставим модулю A его подмодуль $\rho^{\alpha}(A)$. Сделаем это следующим образом: $\rho^0(A) = A$; далее, если $\beta = \alpha + 1$ для какого-то ординального числа α, то $\rho^{\beta}(A) = \rho(\rho^{\alpha}(A))$; если же ординал β является предельным, то $\rho^{\beta}(A) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \rho^{\alpha}(A)$. Получаем убывающую цепочку подмодулей

$$A \supset \rho^1(A) \supset \rho^2(A) \supset \ldots \supset \rho^{\alpha}(A) \supset \ldots .$$

Она, очевидно, стабилизируется, и существует наименьшее ординальное число σ такое, что справедливо равенство $\rho^{\sigma}(A) = \rho^{\sigma+1}(A)$. Для всякого модуля A введём обозначение $\widehat{\rho}(A) = \rho^{\sigma}(A)$.

Двойственным образом определяются подмодули $\rho_{\alpha}(A)$: полагаем $\rho_0(A) = 0$; если $\beta = \alpha + 1$ для некоторого ординала α, то выберем $\rho_{\beta}(A)$ так, чтобы $\rho(A/\rho_{\alpha}(A)) = \rho_{\beta}(A)/\rho_{\alpha}(A)$; наконец, если β — предельный ординал, то $\rho_{\beta}(A) = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \rho_{\alpha}(A)$. Мы получаем возрастающую цепочку

$$0 \subset \rho_1(A) \subset \rho_2(A) \subset \ldots \subset \rho_{\alpha}(A) \subset \ldots .$$

Пусть σ есть наименьшее ординальное число, для которого имеет место равенство $\rho_{\sigma}(A) = \rho_{\sigma+1}(A)$. Обозначим $\overline{\rho}(A) = \rho_{\sigma}(A)$.

Предложение 1.6 [31]. *(а) $\widehat{\rho}$ является идемпотентным предрадикалом, $\widehat{\rho} \leqslant \rho$. Более того, $\widehat{\rho}$ — наибольший из всех идемпотентных предрадикалов ρ' категории* mod-S *со свойством $\rho' \leqslant \rho$.*

(б) $\overline{\rho}$ является радикалом, $\rho \leqslant \overline{\rho}$. Более того, $\overline{\rho}$ — наименьший из всех радикалов ρ' категории mod-S *со свойством $\rho \leqslant \rho'$.*

Предложение 1.7 [3]. *Если ρ — предрадикал категории* mod-S, *то для классов $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho)$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ выполнено*
(а) $\widehat{\rho} = \rho^{\mathcal{R}}$, причём $\mathcal{R}(\widehat{\rho}) = \mathcal{R}$;
(б) $\overline{\rho} = \rho_{\mathcal{P}}$, причём $\mathcal{P}(\overline{\rho}) = \mathcal{P}$.

Предложение 1.8 [3]. *Пусть ρ, ρ' — идемпотентные радикалы. Следующие условия эквивалентны:*
1) $\rho \leqslant \rho'$;
2) $\mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{R}(\rho')$;
3) $\mathcal{P}(\rho) \supset \mathcal{P}(\rho')$.

При помощи этого предложения несложно показать, что совокупность всех идемпотентных радикалов категории mod-S образует полную большую решётку с нулём и единицей (*большая решётка* отличается от обычной тем, что рассматриваемая совокупность может не являться множеством). При этом для семейства идемпотентных радикалов $\{\rho_i\}_{i\in I}$ пересечение и объединение определяются следующим образом:

$$\Big(\bigwedge_{i\in I} \rho_i\Big)(A) = \sum \big\{ B \subset A \bigm| B \in \mathcal{R}(\rho_i) \text{ для всех } i \in I \big\}, \tag{2a}$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I} \rho_i\Big)(A) = \bigcap \big\{ B \subset A \bigm| A/B \in \mathcal{P}(\rho_i) \text{ для всех } i \in I \big\}. \tag{2b}$$

Нуль и единица рассматриваемой большой решётки будут обозначаться соответственно 0 и 1.

Третья глава диссертации посвящена идемпотентным радикалам в категории абелевых групп, т.е. модулей над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$. Приведём ряд фактов, касающихся этих радикалов [8, 9, 18, 20].

Теорема 1.9 [9, 18]. *Предрадикал ρ категории* mod-$\mathbf{Z}$ *является кручением тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*
1) $\rho(A) = A$ для любой группы A;
2) существует подмножество P_1 (возможно, пустое) множества всех простых чисел P такое, что $\rho(A) = \bigoplus_{p \in P_1} A_p$ для любой группы A.

В частности, предрадикалы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_p$, которые сопоставляют всякой группе A её периодическую часть $\mathbf{t}(A)$ и её p-компоненту $\mathbf{t}_p(A) = A_p$ соответственно, являются кручениями.

Предложение 1.10 [18]. *Пусть ρ — идемпотентный радикал и A — абелева группа. Тогда $A \in \mathcal{R}(\rho)$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ и $A/\,\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$.*

В частности, из $A \in \mathcal{R}(\rho)$ следует, что $A_p \in \mathcal{R}(\rho)$ для любого p.

Подгруппа B группы A называется *сервантной*, если для всякого натурального числа n выполнено $nB = B \cap nA$, т.е. для любого $b \in B$ и для любого n уравнение $na = b$ разрешимо в A тогда и только тогда, когда оно разрешимо в B. Подгруппа B называется *p-сервантной*, если $p^k B = B \cap p^k A$ для любого натурального k.

Предложение 1.11 [20]. *Пусть ρ — идемпотентный радикал и A — абелева группа. Тогда подгруппа $\rho(A)$ сервантна в A.*

Напомним, что абелева группа называется *рациональной*, если она изоморфна некоторой подгруппе группы всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$.

Следствие 1.12 [20]. *Если ρ — идемпотентный радикал, то для всякой рациональной группы A выполнено $\rho(A) = 0$ или $\rho(A) = A$.*

Следствие 1.13 [20]. *Предрадикал $\mathbf{d}$, ставящий всякой абелевой группе A в соответствие наибольшую делимую подгруппу $\mathbf{d}(A)$, является наименьшим среди всех идемпотентных радикалов ρ таких, что класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы.*

Теорема 1.14 описывает идемпотентные радикалы ρ, для которых имеет место неравенство $\rho \leqslant \mathbf{t}$.

Теорема 1.14 [8, 18]. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Если радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит только периодические группы, то существуют непересекающиеся подмножества P_1 и P_2 множества P такие, что для любой группы A выполнено*

$$\rho(A) = \Big(\bigoplus_{p\in P_1} A_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in P_2} \mathbf{d}(A_p)\Big).$$

Обратно, всякий предрадикал ρ указанного вида есть идемпотентный радикал, удовлетворяющий условию $\rho \leqslant \mathbf{t}$.

§2. Основные свойства функторов $\otimes$ и Hom

Пусть A_S, ${}_SF$ — модули, L — свободная абелева группа, базисом которой являются элементы декартова произведения $A \times F$. Через K мы обозначим подгруппу группы L, порождаемую элементами вида

$$(a + a', f) - (a, f) - (a', f),$$
$$(a, f + f') - (a, f) - (a, f'),$$
$$(as, f) - (a, sf)$$

для всех $a, a' \in A$, $f, f' \in F$ и $s \in S$. Факторгруппа L/K называется *тензорным произведением* модулей A и F и обозначается $A \otimes_S F$. Образ элемента (a, f) при естественном эпиморфизме $L \to L/K$ обозначается $a \otimes_S f$. Если кольцо S коммутативно, то, очевидно, $A \otimes_S F \cong F \otimes_S A$.

Ясно, что в случае абелевых групп при определении подгруппы K можно не учитывать элементы $(as, f) - (a, sf)$. Если $S = \mathbf{Z}$, то пишем просто $A \otimes F$ и $a \otimes f$.

Определение 2.1. Пусть A_S, ${}_SF$ — модули, N — абелева группа. Отображение $g\colon A \times F \to N$ называется *билинейным*, если для любых $a, a' \in A$ и $f, f' \in F$ выполнено

$$g(a + a', f) = g(a, f) + g(a', f),$$
$$g(a, f + f') = g(a, f) + g(a, f').$$

Билинейное отображение g называется *S-сбалансированным*, если для любых $a \in A$, $f \in F$ и $s \in S$ выполнено $g(as, f) = g(a, sf)$.

Легко видеть, что отображение $h\colon A \times F \to A \otimes_S F$, переводящее всякую пару (a, f) в $a \otimes_S f$, является S-сбалансированным. Следующая теорема подчёркивает важность тензорных произведений.

Теорема 2.2 [2]. *Для любого S-сбалансированного отображения $g\colon A \times F \to N$ существует единственный гомоморфизм абелевых групп*

$\varphi\colon A \otimes_S F \to N$ такой, что $g = \varphi h$. Указанное свойство определяет абелеву группу $A \otimes_S F$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Предложение 2.3 [2]. *Пусть ${}_SF$ и A_S — произвольные модули, причём $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, $A = \bigoplus\limits_{j\in J} A_j$. Тогда $A \otimes_S F \cong \bigoplus\limits_{i,j} (A_j \otimes_S F_i)$.*

Множество $\mathrm{Hom}_S(V, A)$ всех S-модульных гомоморфизмов из V_S в A_S является абелевой группой относительно сложения гомоморфизмов, где $(\varphi + \varphi')(v) = \varphi(v) + \varphi'(v)$ для любых $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_S(V, A)$ и $v \in V$. Если $S = \mathbf{Z}$, то пишем просто $\mathrm{Hom}(V, A)$. Ясно, что для любого кольца S выполнено включение $\mathrm{Hom}_S(V, A) \subset \mathrm{Hom}(V, A)$.

Предложение 2.4 [2]. *Пусть A_S и V_S — произвольные модули, причём $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$, $V = \bigoplus\limits_{j\in J} V_j$. Тогда $\mathrm{Hom}_S(V, A) \cong \prod\limits_{i,j} \mathrm{Hom}_S(V_j, A_i)$.*

В следующих двух теоремах устанавливается, что операция взятия тензорного произведения ассоциативна (с точностью до изоморфизма), а функторы $\otimes$ и Hom являются сопряжёнными.

Теорема 2.5 [2]. *Пусть даны R-модуль A_R, R-S-бимодуль ${}_RB_S$ и S-модуль ${}_SC$. Тогда абелевы группы $A \otimes_R B$ и $B \otimes_S C$ естественным образом превращаются в правый S-модуль и левый R-модуль соответственно, причём имеет место изоморфизм*

$$A \otimes_R (B \otimes_S C) \overset{\varepsilon}{\cong} (A \otimes_R B) \otimes_S C,$$

задаваемый равенством $\varepsilon(a \otimes_R (b \otimes_S c)) = (a \otimes_R b) \otimes_S c$.

Теорема 2.6 [2]. *Пусть даны R-модуль A_R, S-R-бимодуль ${}_SB_R$ и S-модуль C_S. Тогда абелева группа $\mathrm{Hom}_R(B, A)$ естественным образом превращается в правый S-модуль, причём имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_S(C, \mathrm{Hom}_R(B, A)) \overset{\varepsilon}{\cong} \mathrm{Hom}_R(C \otimes_S B, A),$$

задаваемый равенством $\big[\varepsilon(\varphi)\big](c \otimes_S b) = \big[\varphi(c)\big](b)$.

Предложение 2.7 [2]. *Пусть дан модуль A_S. Тогда*
(а) сопоставления $a \otimes_S s \rightsquigarrow as$ и $a \rightsquigarrow a \otimes_S 1$ определяют изоморфизм правых S-модулей $A \otimes_S S$ и A;
(б) сопоставления $\varphi \rightsquigarrow \varphi(1)$ и $a \rightsquigarrow \varphi_a$ (где $\varphi_a(s) = as$) определяют изоморфизм правых S-модулей $\mathrm{Hom}_S(S, A)$ и A.

Заметим, что каждый гомоморфизм правых S-модулей $\alpha\colon B \to A$ индуцирует гомоморфизм абелевых групп $\overline{\alpha}\colon B \otimes_S F \to A \otimes_S F$, который переводит элементы вида $b \otimes_S f$ в $\alpha(b) \otimes_S f$. Кроме того, имеем индуцированный гомоморфизм абелевых групп $\alpha_*\colon \mathrm{Hom}_S(V, B) \to \mathrm{Hom}_S(V, A)$, действующий следующим образом: $\big[\alpha_*(\varphi)\big](v) = \alpha(\varphi(v))$ для всех $v \in V$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(V, B)$.

Предложение 2.8 [1]. *Пусть (1) — точная последовательность правых S-модулей. Тогда для любых модулей ${}_SF$ и V_S индуцированные последовательности абелевых групп*

$$B \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} C \otimes_S F \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, B) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_S(V, C)$$

также являются точными.

Определение 2.9. Левый S-модуль F назовём *плоским*, если для любой точной последовательности S-модулей вида (1) индуцированная последовательность

$$0 \longrightarrow B \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} C \otimes_S F \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

также является точной.

В заключение параграфа приведём несколько фактов, касающихся тензорных произведений абелевых групп.

Теорема 2.10 [14]. *Класс всех плоских $\mathbf{Z}$-модулей (т.е. плоских абелевых групп) совпадает с классом абелевых групп без кручения.*

Определение 2.11. Точную последовательность абелевых групп вида (1) назовём *сервантно точной* (*p-сервантно точной*), если $\operatorname{Im}\alpha$ есть сервантная (соответственно p-сервантная) подгруппа группы A.

Теорема 2.12 [14]. *(а) Пусть последовательность (1) является сервантно точной. Тогда для всякой группы F индуцированная последовательность (3) также сервантно точна.*

(б) Пусть последовательность (1) является p-сервантно точной. Тогда для всякой p-группы F индуцированная последовательность (3) сервантно точна.

§3. $\mathrm{T}(\boldsymbol{F})$-радикалы и $\mathrm{E}(\boldsymbol{V})$-радикалы

Некоторые из встречающихся в настоящем параграфе результатов (предложения 3.2, 3.4 и 3.7) известны в теории радикалов; для полноты изложения мы приведём их доказательства.

Здесь и далее F будет обозначать некоторый левый S-модуль.

Определение 3.1. Модуль $A \in \text{mod-}S$ называется $\mathrm{T}(F)$-*модулем*, если $A \otimes_S F = 0$. Класс всех $\mathrm{T}(F)$-модулей обозначим $\mathcal{T}(F)$.

Предложение 3.2. *Класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно*

(а) прямых сумм;

(б) гомоморфных образов;

(в) расширений.

Доказательство. (а) Если все слагаемые из некоторого прямого разложения модуля A принадлежат классу $\mathcal{T}(F)$, то по предложению 2.3 отсюда сразу следует $A \in \mathcal{T}(F)$.

(б) Пусть модуль C является гомоморфным образом модуля A. Если при этом $A \in \mathcal{T}(F)$, то $C \in \mathcal{T}(F)$ (предложение 2.8).

(в) Если A есть расширение модуля B при помощи модуля C, то по предложению 2.8 из $B \in \mathcal{T}(F)$ и $C \in \mathcal{T}(F)$ следует $A \in \mathcal{T}(F)$. □

Позднее мы увидим, что в общем случае класс $\mathcal{T}(F)$ не является замкнутым относительно прямых произведений.

Пусть V (здесь и далее) — правый S-модуль.

Определение 3.3. Модуль $A \in \text{mod-}S$ называется $\mathrm{E}(V)$-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$. Класс всех $\mathrm{E}(V)$-модулей обозначим $\mathcal{E}(V)$.

Предложение 3.4. *Класс $\mathcal{E}(V)$ замкнут относительно*

(а) прямых произведений;

(б) подмодулей;

(в) расширений.

Доказательство. (а) Если каждый прямой сомножитель модуля A входит в $\mathcal{E}(V)$, то отсюда следует $A \in \mathcal{E}(V)$ (предложение 2.4).

(б) Пусть B — некоторый подмодуль модуля A. Если $A \in \mathcal{E}(V)$, то по предложению 2.8 получаем, что $B \in \mathcal{E}(V)$.

(в) Если A — расширение модуля B при помощи модуля C, то из $B \in \mathcal{E}(V)$ и $C \in \mathcal{E}(V)$ следует $A \in \mathcal{E}(V)$ (предложение 2.8). $\square$

В частности, класс $\mathcal{E}(V)$ замкнут относительно прямых сумм.

Через $\mathrm{W}_F(A)$ обозначим сумму всех подмодулей B модуля A, для которых $B \in \mathcal{T}(F)$. Символом $\mathrm{H}_V(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей B модуля A таких, что $A/B \in \mathcal{E}(V)$. Тогда по теореме 1.4 получаем, что W_F и H_V являются идемпотентными радикалами. Далее мы для краткости будем называть их соответственно «$\mathrm{T}(F)$-*радикал*» и «$\mathrm{E}(V)$-*радикал*».

Введём теперь понятия нейтрализатора и следа, тесно связанные с $\mathrm{T}(F)$-радикалами и $\mathrm{E}(V)$-радикалами.

Определение 3.5. Пусть A_S — модуль. Его F-*нейтрализатором* называется множество всех $a \in A$ таких, что в тензорном произведении $A \otimes_S F$ для всякого $f \in F$ выполнено равенство $a \otimes_S f = 0$. Обозначим это множество $\mathrm{n}_F(A)$. Возникающий при этом предрадикал n_F мы также будем называть (F-)нейтрализатором.

Известно [3, 4], что F-нейтрализатор всегда является радикалом. Для полноты изложения мы докажем это утверждение. В силу равенств $(a + a') \otimes_S f = a \otimes_S f + a' \otimes_S f$ и $as \otimes_S f = a \otimes_S sf$ нейтрализатор $\mathrm{n}_F(A)$ является подмодулем модуля A. Далее, пусть $\varphi\colon B \to A$ — гомоморфизм S-модулей, а $\overline{\varphi}\colon B \otimes_S F \to A \otimes_S F$ — соответствующий индуцированный гомоморфизм групп. Если $b \in \mathrm{n}_F(B)$, то для всякого $f \in F$ выполнены равенства $\varphi(b) \otimes_S f = \overline{\varphi}(b \otimes_S f) = \overline{\varphi}(0) = 0$, т.е. $\varphi(b) \in \mathrm{n}_F(A)$. Значит, $\varphi(\mathrm{n}_F(B)) \subset \mathrm{n}_F(A)$, так что n_F действительно является предрадикалом.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\,\mathrm{n}_F(A) \longrightarrow 0$$

(где α — вложение) и индуцированную ею последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} (A/\,\mathrm{n}_F(A)) \otimes_S F \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Можно переформулировать определение F-нейтрализатора следующим образом: $\mathrm{n}_F(A)$ — это наибольший подмодуль в A, для которого $\overline{\alpha} = 0$.

Пользуясь этим определением и предложением 2.8, мы получаем, что $\overline{\beta}$ — мономорфизм (и, значит, изоморфизм). Далее, если выполнено $\overline{a} \in \mathrm{n}_F(A/\,\mathrm{n}_F(A))$, то для любого $f \in F$ имеем $\overline{\beta}(a \otimes_S f) = \overline{a} \otimes_S f = 0$, так что $a \otimes_S f = 0$. Таким образом, $a \in \mathrm{n}_F(A)$, откуда сразу следует, что $\overline{a} = 0$. Итак, $\mathrm{n}_F(A/\,\mathrm{n}_F(A)) = 0$, поэтому F-нейтрализатор является радикалом.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{R}(\mathrm{n}_F) = \mathcal{T}(F)$. Отсюда по предложению 1.7 получаем, что W_F — наибольший из всех идемпотентных предрадикалов (и, следовательно, идемпотентных радикалов) ρ таких, что $\rho \leqslant \mathrm{n}_F$; кроме того, $\mathcal{R}(\mathrm{W}_F) = \mathcal{T}(F)$. Далее, если для некоторого модуля A мы построим убывающую последовательность подмодулей

$$\mathrm{n}_F^{\beta}(A) = \begin{cases} A, & \text{если } \beta = 0; \\ \mathrm{n}_F(\mathrm{n}_F^{\alpha}(A)), & \text{если } \beta = \alpha + 1; \\ \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \mathrm{n}_F^{\alpha}(A), & \text{если ординал } \beta \text{ предельный}, \end{cases}$$

то всегда найдётся ординал σ такой, что $\mathrm{n}_F^{\sigma}(A) = \widehat{\mathrm{n}}_F(A) = \mathrm{W}_F(A)$.

Убедимся на примере, что в общем случае неравенство $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{n}_F$ является строгим, т.е. радикал n_F не обязан быть идемпотентным.

Пример 3.6. Пусть $S = \mathbf{Z}$, $F = \mathbf{Z}(p)$ и $A = \mathbf{Z}$. Для всякой ненулевой подгруппы B группы A имеем $B \cong \mathbf{Z}$, так что $B \otimes F \cong F \neq 0$.

Поэтому $\mathrm{W}_F(A) = 0$. Значит, $A \notin \mathcal{T}(F)$ и, следовательно, $\mathrm{n}_F(A) \neq A$. С другой стороны, для любых $a \in A$ и $f \in F$ справедливы равенства $pa \otimes f = a \otimes pf = 0$, т.е. $pA \subset \mathrm{n}_F(A)$. Поскольку pA есть максимальная подгруппа группы A, получаем, что $\mathrm{n}_F(A) = pA$. Итак, $\mathrm{n}_F \neq \mathrm{W}_F$.

Предложение 3.7 [3, 4]. *Пусть F — плоский модуль. Тогда*
(а) $\mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$*;*
(б) W_F *— кручение.*

Доказательство. (а) В силу определения плоского модуля последовательность (4) является точной. Поэтому из условия $\overline{\alpha} = 0$ следует равенство $\mathrm{n}_F(A) \otimes_S F = 0$. Таким образом, для любого модуля A имеем $\mathrm{n}_F(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$, т.е. $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{W}_F$ и, значит, $\mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$.

(б) Пусть B — подмодуль модуля A. Индуцированный вложением $\alpha\colon B \to A$ гомоморфизм $\overline{\alpha}\colon B \otimes_S F \to A \otimes_S F$ является инъективным, поскольку F — плоский модуль. Таким образом, из условия $A \otimes_S F = 0$ следует $B \otimes_S F = 0$, поэтому модуль A может входить в $\mathcal{T}(F)$ только вместе со всеми своими подмодулями. Итак, W_F — кручение. $\square$

Замечание. Шелтер и Робертс [29] установили следующий факт: если S — коммутативное нётерово кольцо, то всякое кручение ρ категории mod-S имеет указанный выше вид, т.е. существует плоский модуль F такой, что $\rho = \mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$. Они же построили пример коммутативного кольца S, для которого это утверждение неверно.

Определение 3.8. Пусть A_S — модуль. *V-следом* в этом модуле называется сумма образов всех S-модульных гомоморфизмов $\varphi\colon V \to A$. Обозначим эту сумму $\mathrm{tr}_V(A)$. Возникающий при этом предрадикал tr_V мы также будем называть (V-)следом.

Во избежание путаницы заметим, что выбранная терминология и сопутствующая ей нотация несколько отличаются от используемых, в частности, в работах [12, 28].

Предложение 3.9 [3]. *Для любого модуля V_S след tr_V является идемпотентным предрадикалом. Кроме того, tr_V — наименьший среди всех предрадикалов ρ таких, что $V \in \mathcal{R}(\rho)$.*

Как и в случае с F-нейтрализатором, определение V-следа можно переформулировать. Точная последовательность S-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{tr}_V(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\,\mathrm{tr}_V(A) \longrightarrow 0$$

(где α — вложение) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, \mathrm{tr}_V(A)) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_S(V, A/\,\mathrm{tr}_V(A)).$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{tr}_V(A)$ — наименьший из всех подмодулей модуля A, для которых $\beta_* = 0$.

Очевидно, что $\mathcal{P}(\mathrm{tr}_V) = \mathcal{E}(V)$. По предложению 1.7 получаем, что H_V есть наименьший из всех радикалов (и тем более из всех идемпотентных радикалов) ρ таких, что $\mathrm{tr}_V \leqslant \rho$, при этом $\mathcal{P}(\mathrm{H}_V) = \mathcal{E}(V)$. Как и в случае с $\mathrm{T}(F)$-радикалом, H_V можно рассматривать как трансфинитный предел последовательности, определяемой при помощи идемпотентного предрадикала tr_V.

Учитывая всё сказанное, приходим к следующему результату.

Предложение 3.10. H_V *— наименьший из всех идемпотентных радикалов ρ таких, что $V \in \mathcal{R}(\rho)$.*

Данный факт делает $\mathrm{E}(V)$-радикалы весьма удобным инструментом и, кроме того, источником различных примеров и контрпримеров. Добавим, что замечание, которое было сделано после предложения 1.8, имеет под собой основания: так, в [22] доказано, что совокупность всех $\mathrm{E}(V)$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ не является множеством.

Убедимся на примере, что неравенство $\mathrm{tr}_V \leqslant \mathrm{H}_V$, вообще говоря, является строгим, т.е. идемпотентный предрадикал tr_V не обязан быть радикалом.

Пример 3.11. Пусть $S = \mathbf{Z}$, $V = \mathbf{Z}(p)$ и $A = \mathbf{Z}(p^\infty)$. Для любой собственной подгруппы B группы A имеем $A/B \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$, следовательно, $\mathrm{Hom}(V, A/B) \neq 0$ и, далее, $A/B \notin \mathcal{E}(V)$. Поэтому $\mathrm{H}_V(A) = A$. С другой стороны, $\mathrm{tr}_V(A) = \mathbf{Z}(p)$. Получили, что $\mathrm{tr}_V \neq \mathrm{H}_V$.

Предложение 3.12. *Пусть даны S-модули ${}_SF$ и V_S и их прямые разложения $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, $V = \bigoplus\limits_{j\in J} V_j$. Тогда*

(а) $\bigwedge\limits_{i\in I} \mathrm{W}_{F_i} = \mathrm{W}_F$;

(б) $\bigvee\limits_{j\in J} \mathrm{H}_{V_j} = \mathrm{H}_V$.

Доказательство. (а) Ясно, что $A \otimes_S F = 0$ тогда и только тогда, когда $A \otimes_S F_i = 0$ для всех $i \in I$ (предложение 2.3). Следовательно,

$$\mathcal{T}(F) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}(F_i). \tag{5}$$

В силу равенства (2a) отсюда следует требуемое утверждение.

(б) Достаточно воспользоваться вытекающим из предложения 2.4 соотношением $\mathcal{E}(V) = \bigcap\limits_{j\in J} \mathcal{E}(V_j)$ и равенством (2b). □

Следствие 3.13. *Если совокупность всех* $\mathrm{T}(F)$*-радикалов категории* mod-S *образует множество, то относительно естественного порядка предрадикалов это множество является полной решёткой.*

Доказательство. Предположим, что указанная совокупность действительно образует множество. Из равенства $\mathcal{T}(0) = \text{mod-}S$ получаем, что $\mathrm{W}_0(A) = A$ для любого модуля A. Таким образом, рассматриваемое множество содержит наибольший элемент $1 = \mathrm{W}_0$. Кроме того, каждое непустое подмножество этого множества имеет точную нижнюю грань (см. предыдущее предложение). Отсюда уже непосредственно вытекает требуемое утверждение [11, 31]. □

ГЛАВА II

Т-РАДИКАЛЫ И Е-РАДИКАЛЫ

В настоящей главе мы будем иметь дело сразу с двумя кольцами S и R в ситуации, когда категория mod-R вкладывается в категорию mod-S. Рассматриваются $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули, понимаемые в том же смысле, что и в работах [5, 10]. Вводимое в §4 понятие Е-радикала служит обобщением идемпотентного радикала, изучавшегося Пирсом в статье [28], в той же степени, в какой $\mathrm{E}(e)$-модули из [5, 10] обобщали «классические» Е-модули. Двойственным образом задаётся Т-радикал.

В §4 устанавливаются связи между идемпотентными радикалами, введёнными в первой главе, и Т-радикалом и Е-радикалом. Доказано, что Т-радикал, заданный в категории mod-R, может быть представлен как сужение некоторого $\mathrm{T}(F)$-радикала категории mod-S. Далее, можно указать модуль ${}_RG$ такой, что Т-радикал совпадает с $\mathrm{T}(G)$-радикалом категории mod-R. С другой стороны, в случае коммутативного кольца S произвольный $\mathrm{T}(F)$-радикал категории mod-S можно отождествить с подходящим Т-радикалом. Аналогичные утверждения справедливы для Е-радикала. Данные результаты объясняют, почему для радикалов W_F и H_V были выбраны названия «$\mathrm{T}(F)$-радикал» и «$\mathrm{E}(V)$-радикал». В §5 исследуются связи между $\mathrm{T}(e)$-модулями ($\mathrm{E}(e)$-модулями) над кольцом R и над некоторым факторкольцом этого кольца.

§4. $\mathrm{T}(e)$-модули, $\mathrm{E}(e)$-модули и связанные с ними радикалы

Пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. Всякий R-модуль A можно рассматривать как S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для всех $a \in A$, $s \in S$ (этот модуль называют *притягивающим*). Очевидно, что каждый R-гомоморфизм таких S-модулей является также S-гомоморфизмом. Это позволяет рассматривать mod-R как подкатегорию в mod-S [12].

Легко видеть, что R и $e(S)$ являются S-S-бимодулями. Введём обозначение $R_0 = R/e(S)$. На протяжении всего параграфа считается, что $F = V = R_0$, с той разницей, что в случае с F нас будут интересовать свойства R_0 как левого S-модуля, а в случае с V — как правого.

Заметим, что для произвольного R-модуля A можно рассмотреть канонический эпиморфизм $w\colon A \otimes_S R \to A \otimes_R R$, где $w(a \otimes_S r) = a \otimes_R r$ для любых $a \in A$ и $r \in R$. Кроме того, всегда справедливо включение $\mathrm{Hom}_R(R, A) \subset \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Определение 4.1. Пусть дан кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$. R-модуль A назовём $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если эпиморфизм w является изоморфизмом. Модуль A называется $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, если выполнено равенство $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Класс всех $\mathrm{T}(e)$-модулей над кольцом R будем обозначать через $\mathcal{T}$, класс всех $\mathrm{E}(e)$-модулей — через $\mathcal{E}$. Приведём теорему, описывающую характеристические свойства $\mathrm{T}(e)$-модулей и $\mathrm{E}(e)$-модулей.

Теорема 4.2 [5, 10]. *(a) Для модуля A_R равносильны следующие условия:*

1) A — $\mathrm{T}(e)$-модуль;

2) $A \otimes_S R_0 = 0$;

3) $\mathrm{Hom}_R(A, B) = \mathrm{Hom}_S(A, B)$ для любого R-модуля B;

4) канонический эпиморфизм $A \otimes_S B \to A \otimes_R B$ является изоморфизмом *для любого левого R-модуля B.*

(б) Для модуля A_R равносильны следующие условия:

1) A — $\mathrm{E}(e)$-модуль;

2) $\mathrm{Hom}_S(R_0, A) = 0$;

3) $\mathrm{Hom}_R(B, A) = \mathrm{Hom}_S(B, A)$ для любого R-модуля B.

Определение 4.3. T-*радикалом* модуля A_R назовём сумму $\mathrm{W}(A)$ всех его подмодулей B таких, что B есть $\mathrm{T}(e)$-модуль.

Из теоремы 4.2 мы знаем, что элементы класса $\mathcal{T}$ — это все те R-модули, которые, если рассмотреть их как притягивающие S-модули, содержатся в $\mathcal{T}(F)$; другими словами, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(F) \cap \text{mod-}R$. Учитывая последнее равенство, из определений $\mathrm{W}_F(A)$ и $\mathrm{W}(A)$ легко вывести, что $\mathrm{W}(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$. Наша ближайшая цель — показать, что на самом деле имеет место равенство. Для удобства F-нейтрализатор модуля A будем обозначать просто $\mathrm{n}(A)$. Ясно, что $\mathrm{n}(A)$ является S-подмодулем в A.

Теорема 4.4. *Пусть A — R-модуль. Тогда нейтрализатор $\mathrm{n}(A)$ является его подмодулем.*

Доказательство. Элементы левого модуля $F = R_0$ будем обозначать $\overline{r}$, $\overline{r}_1$ и т.д. Зафиксируем произвольный элемент $r_1 \in R$ и зададим отображение $g\colon A \times R \to A \otimes_S F$, полагая $g(a, r) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Билинейность g очевидна. Равенства

$$
\begin{aligned}
g(as, r) &= (as)r \otimes_S \overline{r}_1 - as \otimes_S \overline{rr}_1 = \\
&= asr \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{srr}_1 = g(a, sr)
\end{aligned}
$$

показывают, что отображение g является S-сбалансированным. Значит, по теореме 2.2 существует групповой гомоморфизм $\varphi\colon A \otimes_S R \to A \otimes_S F$ такой, что $\varphi(a \otimes_S r) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Точная последовательность левых S-модулей

$$
0 \longrightarrow e(S) \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0
$$

(α — вложение) индуцирует точную последовательность групп

$$A \otimes_S e(S) \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S R \xrightarrow{\overline{\beta}} A \otimes_S F \longrightarrow 0. \tag{6}$$

Для произвольных $a \in A$, $s \in S$ получаем

$$\varphi(a \otimes_S e(s)) = as \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{sr}_1 = a \otimes_S s\overline{r}_1 - a \otimes_S s\overline{r}_1 = 0.$$

Таким образом, имеем $\operatorname{Im} \overline{\alpha} \subset \operatorname{Ker} \varphi$, откуда в силу точности последовательности (6) следует $\operatorname{Ker} \overline{\beta} \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Поэтому существует групповой гомоморфизм $\psi\colon A \otimes_S F \to A \otimes_S F$, где $\psi(a \otimes_S \overline{r}) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Для произвольных элементов $a \in \mathrm{n}(A)$, $r \in R$ выполнены равенства

$$ar \otimes_S \overline{r}_1 = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1 = \psi(a \otimes_S \overline{r}) = \psi(0) = 0.$$

Поскольку приведённые рассуждения справедливы для всякого $r_1 \in R$, получаем, что $ar \in \mathrm{n}(A)$. Таким образом, $\mathrm{n}(A)$ действительно является подмодулем в A_R. $\square$

Предложение 4.5. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A)$.

Доказательство. Убедимся сначала, что $\mathrm{W}_F(A)$ есть подмодуль R-модуля A. С учётом того, что для некоторого ординала σ выполнено равенство $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{n}^\sigma(A)$, нам достаточно проверить, что для любого ординала β модуль $\mathrm{n}^\beta(A)$ является подмодулем в A_R. Докажем это по индукции.

База ($\beta = 0$) очевидна. Пусть для ординальных чисел, меньших β, требуемое условие справедливо. Если $\beta = \alpha + 1$, то $\mathrm{n}^\alpha(A)$ — подмодуль модуля A_R. Далее, по предыдущей теореме $\mathrm{n}^\beta(A) = \mathrm{n}(\mathrm{n}^\alpha(A))$ есть подмодуль R-модуля $\mathrm{n}^\alpha(A)$. Это значит, что $\mathrm{n}^\beta(A)$ тоже является подмодулем в A_R. Предположим теперь, что β — предельный ординал. Поскольку при $\alpha < \beta$ все модули $\mathrm{n}^\alpha(A)$ суть подмодули R-модуля A, то же можно сказать и об их пересечении $\mathrm{n}^\beta(A)$.

Итак, $\mathrm{W}_F(A) \in \text{mod-}R$ и, следовательно, $\mathrm{W}_F(A) \in \mathcal{T}$. В этом случае $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{W}(A)$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Получили, что Т-радикал есть сужение $\mathrm{T}(F)$-радикала на категорию mod-R. Отсюда, в частности, следует, что W — идемпотентный радикал в mod-R. Оказывается, можно доказать, что и сам радикал W является $\mathrm{T}(G)$-радикалом для некоторого модуля $_RG$.

Обозначим $G = R \otimes_S F$. Из теоремы 2.5 мы знаем, что G естественным образом превращается в левый R-модуль. Значит, G порождает в категории mod-R радикал n_G и идемпотентный радикал W_G.

Предложение 4.6. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства* $\mathrm{n}(A) = \mathrm{n}_G(A)$ *и* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A)$.

Доказательство. По теореме 2.5 и предложению 2.7 имеем

$$A \otimes_R G = A \otimes_R (R \otimes_S F) \cong (A \otimes_R R) \otimes_S F \cong A \otimes_S F,$$

где изоморфизм $\varepsilon\colon A \otimes_R G \to A \otimes_S F$ действует следующим образом: $\varepsilon(a \otimes_R (r \otimes_S f)) = ar \otimes_S f$. Отсюда получаем эквивалентности

$$a \in \mathrm{n}_G(A) \iff a \otimes_R (r \otimes_S f) = 0 \text{ для любых } r \text{ и } f \iff$$
$$\iff ar \otimes_S f = 0 \text{ для любых } r \text{ и } f \iff ar \in \mathrm{n}(A) \text{ для любого } r.$$

Итак, $\mathrm{n}_G(A)$ совпадает с множеством $(\mathrm{n}(A) : R) = \big\{a \in A \;\big|\; aR \subset \mathrm{n}(A)\big\}$. По теореме 4.4 нейтрализатор $\mathrm{n}(A)$ является подмодулем в A_R, так что $\mathrm{n}_G(A) = (\mathrm{n}(A) : R) = \mathrm{n}(A)$. Из равенств $\mathrm{W}_F = \widehat{\mathrm{n}}$ и $\mathrm{W}_G = \widehat{\mathrm{n}}_G$ по индукции легко выводится $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(A)$. $\square$

Определение 4.7. Е-*радикалом* модуля A_R назовём пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех его подмодулей B таких, что A/B есть $\mathrm{E}(e)$-модуль.

R-модуль A принадлежит классу $\mathcal{E}$ в том и только в том случае, когда $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$ (теорема 4.2). Это означает, что $\mathcal{E}$ состоит в точности из тех R-модулей, которые как притягивающие S-модули входят в класс $\mathcal{E}(V)$, т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V) \cap \text{mod-}R$. Сравнивая определения $\mathrm{H}_V(A)$ и $\mathrm{H}(A)$, нетрудно заметить, что во втором случае пересечение берётся по меньшему семейству подмодулей, так что $\mathrm{H}_V(A) \subset \mathrm{H}(A)$. Мы покажем, что в действительности выполнено равенство. V-след в модуле A будем обозначать просто $\mathrm{tr}(A)$. Сначала докажем, что этот V-след является не только S-подмодулем, но и R-подмодулем в A.

Теорема 4.8. *Пусть A — R-модуль. Тогда след* $\mathrm{tr}(A)$ *является его подмодулем.*

Доказательство. Элементы правого модуля $V = R/e(S)$ будут обозначаться $\overline{r}$, $\overline{r}_1$ и т.д. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(V, A)$. Возьмём произвольные элементы $\varphi(\overline{r}_1) \in \mathrm{Im}\,\varphi$ и $r_2 \in R$. Полагая $\psi(r) = \varphi(\overline{r})$ для всякого $r \in R$, мы приходим к гомоморфизму $\psi \in \mathrm{Hom}_S(R, A)$. Зададим отображение $\chi\colon R \to A$ формулой $\chi(r) = \psi(r_1)r - \psi(r_1 r)$. Аддитивность χ очевидна. Кроме того, для произвольного $s \in S$ верны равенства

$$\chi(rs) = \psi(r_1)rs - \psi(r_1 rs) = \big(\psi(r_1)r - \psi(r_1 r)\big)s = \chi(r)s,$$

следовательно, $\chi \in \mathrm{Hom}_S(R, A)$. Далее, для произвольного $s \in S$ имеем $\chi(e(s)) = \psi(r_1)s - \psi(r_1 s) = 0$, так что $e(S) \subset \mathrm{Ker}\,\chi$. Это позволяет нам задать гомоморфизм $\overline{\chi} \in \mathrm{Hom}_S(V, A)$, полагая $\overline{\chi}(\overline{r}) = \chi(r)$. Равенство $\chi(r_2) = \psi(r_1)r_2 - \psi(r_1 r_2)$ перепишем в виде $\psi(r_1)r_2 = \chi(r_2) + \psi(r_1 r_2)$; переходя к гомоморфизмам $V \to A$, получаем, что

$$\varphi(\overline{r}_1)r_2 = \psi(r_1)r_2 \in \mathrm{Im}\,\chi + \mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}\,\overline{\chi} + \mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{tr}_V(A).$$

Итак, для всякого S-гомоморфизма $\varphi\colon V \to A$ справедливо включение $(\mathrm{Im}\,\varphi)R \subset \mathrm{tr}_V(A)$. Следовательно, $(\mathrm{tr}_V(A))R \subset \mathrm{tr}_V(A)$, а это и означает, что $\mathrm{tr}_V(A)$ есть подмодуль модуля A_R. □

Предложение 4.9 служит обобщением одного из результатов, приведённых Пирсом в [28]: он доказал равенство $\mathrm{H}(A) = \overline{\mathrm{tr}}(A)$ в ситуации, когда $S = \mathbf{Z}$ (в этом случае утверждение теоремы 4.8 почти очевидно).

Предложение 4.9. *Для произвольного R-модуля A имеет место равенство* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_V(A)$.

Доказательство. Докажем, что $\mathrm{H}_V(A)$ — подмодуль R-модуля A. Поскольку для некоторого ординального числа σ имеет место равенство $\mathrm{H}_V(A) = \mathrm{tr}_\sigma(A)$, нам достаточно убедиться, что для любого ординала β модуль $\mathrm{tr}_\beta(A)$ является подмодулем в A_R. Воспользуемся трансфинитной индукцией.

База индукции ($\beta = 0$) очевидна. Пусть для ординальных чисел, меньших β, требуемое утверждение справедливо. Если $\beta = \alpha + 1$, то $\mathrm{tr}_\alpha(A)$ — подмодуль модуля A_R. Из предыдущей теоремы нам известно, что $\mathrm{tr}_\beta(A)/\mathrm{tr}_\alpha(A) = \mathrm{tr}(A/\mathrm{tr}_\alpha(A))$ есть подмодуль R-модуля $A/\mathrm{tr}_\alpha(A)$, так что $\mathrm{tr}_\beta(A)$ — подмодуль R-модуля A. Наконец, рассмотрим случай, когда β — предельный ординал. По индуктивному предположению при $\alpha < \beta$ все модули $\mathrm{tr}_\alpha(A)$ являются подмодулями в A_R, следовательно, соответствующее утверждение верно и для их объединения $\mathrm{tr}_\beta(A)$.

Таким образом, $\mathrm{H}_V(A) \in \text{mod-}R$ и $A/\mathrm{H}_V(A) \in \mathcal{E}(V) \cap \text{mod-}R = \mathcal{E}$. В этом случае $\mathrm{H}(A) \subset \mathrm{H}_V(A)$, откуда непосредственно следует нужное равенство. □

Итак, E-радикал совпадает с сужением E(V)-радикала на mod-R. Отсюда сразу получаем, что H — идемпотентный радикал. Убедимся, что и сам этот идемпотентный радикал является E(U)-радикалом для подходящего модуля U_R.

Обозначим $U = V \otimes_S R$. Как нам уже известно, U естественным образом превращается в правый R-модуль. Следовательно, U порождает в категории mod-R идемпотентный предрадикал tr_U и идемпотентный радикал H_U.

Предложение 4.10. *Для произвольного R-модуля A справедливы равенства* $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}_U(A)$ *и* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A)$.

Доказательство. По теореме 2.6 и предложению 2.7 получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_S(V, A) &\cong \operatorname{Hom}_S(V, \operatorname{Hom}_R(R, A)) \cong \\ &\cong \operatorname{Hom}_R(V \otimes_S R, A) = \operatorname{Hom}_R(U, A),\end{aligned}$$

причём изоморфизм $\varepsilon\colon \operatorname{Hom}_S(V, A) \to \operatorname{Hom}_R(U, A)$ задаётся формулой $\big[\varepsilon(\varphi)\big](v \otimes_S r) = \varphi(v)r$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varepsilon(\varphi) = (\operatorname{Im}\varphi)R$ для всякого $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(V, A)$ и, далее, $\operatorname{tr}_U(A) = \operatorname{tr}(A)R$. С учётом теоремы 4.8 имеем $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}_U(A)$. Наконец, из равенств $\mathrm{H}_V = \overline{\operatorname{tr}}$ и $\mathrm{H}_U = \overline{\operatorname{tr}}_U$ следует, что $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_V(A) = \mathrm{H}_U(A)$. $\square$

Предложения 4.5 и 4.9 дают следующий результат: как бы мы ни задавали R-модульную структуру на модуле $A \in \text{mod-}S$ (при условии, конечно, что такая структура согласована с имеющейся S-модульной), подмодули $\mathrm{W}(A)$ и $\mathrm{H}(A)$ будут одними и теми же. Итак, справедлива

Теорема 4.11. *Значения* T*-радикала и* E*-радикала произвольного модуля* A_R *однозначно определяются его* S*-модульной структурой.*

Пример 4.12. Заметим, что при доказательстве предложений 4.5 и 4.9 мы использовали специфические свойства бимодуля R_0. Убедимся, что в общем случае описанная в этих предложениях ситуация не является характерной. Иными словами, сужение идемпотентного радикала ρ категории $\text{mod-}S$ на её подкатегорию $\text{mod-}R$ далеко не всегда оказывается предрадикалом, т.е. может найтись R-модуль A такой, что $\rho(A)$ не является подмодулем в A_R. Нетрудно показать, что для этого кольцевой гомоморфизм e не должен быть центральным. В противном случае для любого $r \in R$ отображение $a \rightsquigarrow ar$ содержится в $\operatorname{Hom}_S(A, A)$, так что в соответствии с определением предрадикала выполнено $\rho(A)r \subset \rho(A)$.

Для множеств X, Y, Z условимся использовать обозначение

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in X,\, y \in Y,\, z \in Z \right\}.$$

Пусть T — некоторое кольцо. Положим

$$R = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R — кольцо относительно матричных операций сложения и умножения, S — его подкольцо, I — идеал кольца S. Положим $\rho = \mathrm{H}_I$, в качестве гомоморфизма колец e будем рассматривать вложение $S \to R$. Нетрудно видеть, что $\rho(R) = \mathrm{tr}_I(R) = I$, т.е. $\rho(R)$ не является подмодулем в R_R. Получили, что сужение идемпотентного радикала H_I на подкатегорию mod-R категории mod-S не является предрадикалом.

Предложение 4.13. *Пусть S — кольцо, ${}_SF_S$ — бимодуль. Тогда существуют кольцо R и гомоморфизм $e\colon S \to R$ такие, что бимодуль $R/e(S)$ изоморфен бимодулю F.*

Доказательство. Пусть R есть множество треугольных матриц следующего вида:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in S,\, f \in F \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что относительно обычных операций сложения и умножения матриц данное множество образует ассоциативное кольцо с единицей. Гомоморфизм $e\colon S \to R$ зададим так:

$$e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Ясно, что естественное соответствие

$$f \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e(S)$$

является взаимно однозначным и определяет изоморфизм S-S-бимодулей $F \cong R/e(S)$. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что описанная в предложении 4.13 ситуация позволяет превратить произвольный S-модуль A в R-модуль, полагая

$$a\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} = as$$

для всех $a \in A$, $s \in S$, $f \in F$. Легко видеть, что упомянутое в начале параграфа вложение mod-$R \to$ mod-S переводит такой R-модуль в исходный модуль A_S. Следовательно, произвольный S-модуль может быть получен как притягивающий модуль из некоторого R-модуля. С учётом предложения 4.5 это позволяет нам отождествить T-радикал категории mod-R с $\mathrm{T}(F)$-радикалом категории mod-S. Аналогичное утверждение справедливо и для E-радикала.

Поскольку модули над коммутативным кольцом S всегда можно рассматривать как S-S-бимодули, получаем следующий результат.

Теорема 4.14. *Пусть S — коммутативное кольцо. Тогда всякий $\mathrm{T}(F)$-радикал ($\mathrm{E}(V)$-радикал) категории mod-S имеет вид T-радикала (соответственно E-радикала) для подходящего кольца R и вложения $e\colon S \to R$.*

§5. $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули над факторкольцом

Пусть I — некоторый идеал кольца R. Рассмотрим факторкольцо $\overline{R} = R/I$. Если A — модуль над $\overline{R}$, то его можно превратить в R-модуль, полагая $ar = a\overline{r}$ (как и ранее, через $\overline{r}$ обозначаем смежный класс $r + I$). Обратное превращение возможно в случае, когда идеал I содержится в аннуляторе модуля A, т.е. если $AI = 0$. На протяжении всего параграфа предполагается, что A является модулем над кольцами R и $\overline{R}$, причём $ar = a\overline{r}$ для любых $a \in A$, $r \in R$. Заметим, что всякий подмодуль модуля $A_{\overline{R}}$ является подмодулем в A_R; справедливо и обратное.

Можно рассматривать $\mathrm{T}(\overline{e})$-модули и $\mathrm{E}(\overline{e})$-модули, где $\overline{e} = \beta e$, а $\beta\colon R \to \overline{R}$ — естественный кольцевой гомоморфизм. Символами $\overline{\mathrm{W}}$ и $\overline{\mathrm{H}}$ будем обозначать соответственно T-радикал и E-радикал, порождаемые гомоморфизмом $\overline{e}$. Ниже устанавливаются связи между $\mathrm{T}(e)$-модулями и $\mathrm{T}(\overline{e})$-модулями, а также между $\mathrm{E}(e)$-модулями и $\mathrm{E}(\overline{e})$-модулями.

Из §3 мы знаем, что всякий левый S-модуль F порождает радикал n_F (F-нейтрализатор) категории mod-S. Точно так же каждый правый S-модуль A задаёт некоторый радикал (A-нейтрализатор) в категории левых модулей S-mod. Этот радикал также будет обозначаться n_A.

Теорема 5.1. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Следующие условия эквивалентны:*
1) A — $\mathrm{T}(e)$-модуль;
2) A — $\mathrm{T}(\overline{e})$-модуль, причём $I \subset \mathrm{n}_A(R)$.

Доказательство. Точная последовательность S-модулей

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} \overline{R} \longrightarrow 0 \tag{7}$$

(α — вложение) индуцирует точную последовательность групп

$$A \otimes_S I \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S R \xrightarrow{\overline{\beta}} A \otimes_S \overline{R} \longrightarrow 0.$$

Заметим, что условие $I \subset \mathrm{n}_A(R)$ равносильно равенству $\overline{\alpha} = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A есть $\mathrm{T}(e)$-модуль, т.е. отображение w является изоморфизмом. Для произвольных $a \in A$, $r \in I$ имеем

$$(w\overline{\alpha})(a \otimes_S r) = w(a \otimes_S r) = a \otimes_R r = ar \otimes_R 1 = 0 \otimes_R 1 = 0,$$

поэтому $\overline{\alpha} = 0$. Далее, для любых $a \in A$, $r \in R$ выполнены равенства

$$a \otimes_S r = w^{-1}(a \otimes_R r) = w^{-1}(ar \otimes_R 1) = ar \otimes_S 1,$$

следовательно,

$$a \otimes_S \overline{r} = \overline{\beta}(a \otimes_S r) = \overline{\beta}(ar \otimes_S 1) = ar \otimes_S \overline{1} = a\overline{r} \otimes_S \overline{1}. \tag{8}$$

Таким образом, все элементы группы $A \otimes_S \overline{R}$ имеют вид $a \otimes_S \overline{1}$. Так как справедлив канонический изоморфизм $A \otimes_{\overline{R}} \overline{R} \cong A$ (предложение 2.7), то различным элементам a модуля A соответствуют различные элементы $a \otimes_{\overline{R}} \overline{1} \in A \otimes_{\overline{R}} \overline{R}$. Следовательно, $\overline{w} \colon A \otimes_S \overline{R} \to A \otimes_{\overline{R}} \overline{R}$ — изоморфизм, т.е. A — $\mathrm{T}(\overline{e})$-модуль.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A есть $\mathrm{T}(\overline{e})$-модуль и $\overline{\alpha} = 0$. Из $\operatorname{Ker} \overline{\beta} = \operatorname{Im} \overline{\alpha} = 0$ следует, что $\overline{\beta}$ является мономорфизмом (и, значит, изоморфизмом). Для любых $a \in A$, $r \in R$ имеем

$$\overline{w}(a \otimes_S \overline{r}) = a \otimes_{\overline{R}} \overline{r} = a\overline{r} \otimes_{\overline{R}} \overline{1} = \overline{w}(a\overline{r} \otimes_S \overline{1}) = \overline{w}(ar \otimes_S \overline{1}).$$

Далее, поскольку $\overline{w} \colon A \otimes_S \overline{R} \to A \otimes_{\overline{R}} \overline{R}$ — изоморфизм, получаем, что $a \otimes_S \overline{r} = ar \otimes_S \overline{1}$. Мы приходим к соотношениям

$$a \otimes_S r = \overline{\beta}^{-1}(a \otimes_S \overline{r}) = \overline{\beta}^{-1}(ar \otimes_S \overline{1}) = ar \otimes_S 1.$$

Как и в случае с равенствами (8), отсюда следует, что w — изоморфизм, так что A — $\mathrm{T}(e)$-модуль. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 5.1 ясно, что $\mathrm{T}(\overline{e})$-подмодулей у модуля $A_{\overline{R}}$ «больше», чем подмодулей, являющихся $\mathrm{T}(e)$-модулями. Таким образом, сравнивая определения $\mathrm{W}(A)$ и $\overline{\mathrm{W}}(A)$, мы получаем

Следствие 5.2. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Тогда* $\mathrm{W}(A) \subset \overline{\mathrm{W}}(A)$.

Теорема 5.3. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Следующие условия эквивалентны:*
1) A — $\mathrm{E}(e)$-модуль;
2) A — $\mathrm{E}(\overline{e})$-модуль, причём $I \subset \bigcap\bigl\{\operatorname{Ker}\varphi \bigm| \varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)\bigr\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A — $\mathrm{E}(e)$-модуль и $\psi\colon \overline{R} \to A$ есть S-гомоморфизм. Тогда, очевидно, $\psi\beta \in \operatorname{Hom}_S(R, A) = \operatorname{Hom}_R(R, A)$. Для произвольных $r, r_1 \in R$ справедливы равенства

$$\psi(\overline{r}\overline{r}_1) = (\psi\beta)(rr_1) = (\psi\beta)(r)r_1 = \psi(\overline{r})r_1 = \psi(\overline{r})\overline{r}_1,$$

т.е. $\psi \in \operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R}, A)$ и, значит, A является $\mathrm{E}(\overline{e})$-модулем. Возьмём теперь произвольный гомоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A) = \operatorname{Hom}_R(R, A)$. Для всякого элемента $r \in I$ имеем $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1)r \in AI = 0$. Итак, $I \subset \operatorname{Ker}\varphi$ для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть A — $\mathrm{E}(\overline{e})$-модуль, а идеал I обладает требуемым свойством. Возьмём произвольный гомоморфизм $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$. Пользуясь тем, что $I \subset \operatorname{Ker}\varphi$, мы можем определить отображение $\overline{\varphi}\colon \overline{R} \to A$, полагая $\overline{\varphi}(\overline{r}) = \varphi(r)$. Легко видеть, что $\overline{\varphi} \in \operatorname{Hom}_S(\overline{R}, A) = \operatorname{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R}, A)$. Следовательно, для любых $r, r_1 \in R$ имеем равенства

$$\varphi(rr_1) = \overline{\varphi}(\overline{r}\overline{r}_1) = \overline{\varphi}(\overline{r})\overline{r}_1 = \varphi(r)\overline{r}_1 = \varphi(r)r_1,$$

так что $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(R, A)$. Поэтому A — $\mathrm{E}(e)$-модуль. $\square$

Замечание. Каждый гомоморфизм правых S-модулей $\alpha\colon B \to C$ индуцирует групповой гомоморфизм $\alpha^*\colon \operatorname{Hom}_S(C, A) \to \operatorname{Hom}_S(B, A)$, где $\bigl[\alpha^*(\varphi)\bigr](b) = \varphi(\alpha(b))$ для любых $b \in B$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(C, A)$. Поэтому мы можем рассмотреть точную (согласно [1]) последовательность абелевых групп и их гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(\overline{R}, A) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}_S(R, A) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}_S(I, A),$$

индуцированную всё той же последовательностью модулей (7). Условие, налагаемое теоремой 5.3 на идеал I, равносильно равенству $\alpha^* = 0$ (что позволяет проследить аналогию с доказательством теоремы 5.1).

Теорема 5.3 позволяет нам утверждать, что $\mathrm{E}(\overline{e})$-модулей в mod-$\overline{R}$ «больше», чем $\mathrm{E}(e)$-модулей. Получаем следующий результат.

Следствие 5.4. *Пусть A — модуль над кольцами R и $\overline{R}$. Тогда $\overline{\mathrm{H}}(A) \subset \mathrm{H}(A)$.*

ГЛАВА III

T($\boldsymbol{F}$)-РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В этой главе предполагается, что S есть кольцо целых чисел, т.е. рассматриваются T(F)-радикалы категории абелевых групп. Учитывая результаты предыдущей главы, мы иногда для краткости называем их просто T-радикалами (а E(V)-радикалы — E-радикалами).

В §6 полностью описываются все T-радикалы категории абелевых групп. Установлено строение образуемого этими радикалами частично упорядоченного множества; показано, что оно является дистрибутивной решёткой. В §7 выясняется, при каких условиях класс $\mathcal{T}(F)$ обладает теми или иными свойствами замкнутости (относительно прямых произведений, подгрупп и т.п.). В частности, получен критерий, который характеризует классы $\mathcal{T}(F)$ как радикальные классы, замкнутые относительно взятия сервантных подгрупп. В §8 доказывается тот факт, что «решёточное» пересечение T-радикалов и их «поточечное» пересечение совпадают.

Напомним обозначения: p — простое число, P — множество всех простых чисел, $\mathbf{t}(A)$ и $\mathbf{d}(A)$ — соответственно периодическая часть и наибольшая делимая подгруппа абелевой группы A. Через $\mathbf{t}_p(A)$ или A_p обозначается p-компонента группы A.

§6. $\mathbf{T}(\boldsymbol{F})$-радикалы абелевых групп и образуемая ими решётка

Начнём параграф леммой, которая объединяет несколько простых фактов, касающихся тензорных произведений абелевых групп.

Лемма 6.1. *Пусть A — абелева группа. Тогда*
(а) $A \otimes \mathbf{Z}(p) = 0$ тогда и только тогда, когда A — p-делимая группа;
(б) $A \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) = 0$ тогда и только тогда, когда $A/\,\mathbf{t}(A)$ — p-делимая группа;
(в) если p-группа G не является делимой, то $A \otimes G = 0$ тогда и только тогда, когда группа A является p-делимой;
(г) если группы A и G не являются периодическими, то $A \otimes G \neq 0$.

Доказательство. (а) Достаточно воспользоваться изоморфизмом $A \otimes \mathbf{Z}(p) \cong A/pA$ [14].

(б) Группа $\mathbf{Z}(p^\infty)$ делима, так что имеем $\mathbf{t}(A) \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) = 0$. Далее, группа $\mathbf{Z}(p^\infty)$ периодическая, следовательно [14], можно записать

$$A \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) \cong \big[\mathbf{t}(A) \oplus (A/\,\mathbf{t}(A))\big] \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) \cong (A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes \mathbf{Z}(p^\infty).$$

Это значит, что из p-делимости факторгруппы $A/\,\mathbf{t}(A)$ следует нужное равенство. С другой стороны, по теореме 2.10 группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является плоской как $\mathbf{Z}$-модуль, поэтому $(A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes \mathbf{Z}(p^\infty)$ содержит подгруппу, изоморфную $(A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes \mathbf{Z}(p)$. Таким образом, равенство $A \otimes \mathbf{Z}(p^\infty) = 0$ справедливо лишь тогда, когда $A/\,\mathbf{t}(A)$ — p-делимая группа.

(в) В случае p-делимости группы A равенство $A \otimes G = 0$ очевидно. С другой стороны, $G/pG \neq 0$, так что G имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом. Тогда по предложению 2.8 абелева группа $A \otimes \mathbf{Z}(p)$ является гомоморфным образом группы $A \otimes G$, т.е. условие $A \otimes G = 0$ выполнено только для p-делимых групп A.

(г) Предположим, что $A \otimes G = 0$. Тогда по предложению 2.8 имеем $A \otimes (G/\,\mathbf{t}(G)) = 0$. Поскольку группа $G/\,\mathbf{t}(G)$ плоская, то $A \otimes (G/\,\mathbf{t}(G))$

содержит подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z} \otimes (G/\,\mathbf{t}(G)) \cong G/\,\mathbf{t}(G)$. Получили противоречие с условием $\mathbf{t}(G) \neq G$. $\square$

Лемма 6.2. *Кручение* $\mathbf{t}$ *коммутирует с любым идемпотентным радикалом категории абелевых групп, т.е. для всякой группы* A *и для всякого идемпотентного радикала* ρ *выполнено* $\mathbf{t}(\rho(A)) = \rho(\mathbf{t}(A))$.

Доказательство. Ясно, что $\rho(\mathbf{t}(A)) \subset \rho(A) \cap \mathbf{t}(A)$. Поскольку $\mathbf{t}$ является кручением, можно записать равенство $\mathbf{t}(\rho(A)) = \rho(A) \cap \mathbf{t}(A)$. С другой стороны, $\rho(A) \in \mathcal{R}(\rho)$, откуда по предложению 1.10 получаем $\mathbf{t}(\rho(A)) \in \mathcal{R}(\rho)$. Поэтому $\mathbf{t}(\rho(A)) = \rho(\mathbf{t}(\rho(A))) \subset \rho(\mathbf{t}(A))$. $\square$

Пусть F — непериодическая абелева группа. Тогда из леммы 6.1 ясно, что класс $\mathcal{T}(F)$ может содержать только периодические группы. Следовательно, для всякой абелевой группы A верны равенства

$$\mathrm{W}_F(A) = \mathbf{t}(\mathrm{W}_F(A)) = \mathrm{W}_F(\mathbf{t}(A)) = \mathrm{W}_F\Big(\bigoplus_{p\in P} A_p\Big) = \bigoplus_{p\in P} \mathrm{W}_F(A_p). \tag{9}$$

Пусть M_1 есть множество, состоящее из трёх элементов произвольной природы: l, m и n. Зададим функцию $\psi^F\colon P \to M_1$:

$$\psi^F(p) = \begin{cases} l, & \text{если группа } F \text{ является } p\text{-делимой;} \\ m, & \text{если группа } F \text{ не является } p\text{-делимой,} \\ & \qquad \text{а факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ является;} \\ n, & \text{если факторгруппа } F/\,\mathbf{t}(F) \text{ не является } p\text{-делимой.} \end{cases}$$

Заметим, что для произвольной функции $\psi\colon P \to M_1$ можно подобрать группу F такую, что $\psi^F = \psi$. Например, достаточно положить

$$F = F(\psi) = \mathbf{Q}^{(lm)} \oplus \Big(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{Z}(p)\Big). \tag{10}$$

(Здесь $\mathbf{Q}^{(lm)}$ — группа всех рациональных чисел, чьи знаменатели суть произведения степеней простых чисел p, для которых $\psi(p) \in \{l, m\}$, а сумма циклических групп берётся по всем p, для которых $\psi(p) = m$. Подобная нотация будет использоваться и далее.)

Вернёмся к группе F. Совокупность всех p-групп, содержащихся в радикальном классе некоторого идемпотентного радикала, состоит либо из всех p-групп, либо из всех делимых p-групп, либо из одной нулевой группы [8, 18]. Рассмотрим три случая.

1) $\psi^F(p) = l$. Тогда $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$. Поэтому все p-группы A содержатся в классе $\mathcal{T}(F)$ и для них выполнено $\mathrm{W}_F(A) = A$.

2) $\psi^F(p) = m$. Следовательно, $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{T}(F)$ и $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(F)$. Это значит, что класс $\mathcal{T}(F)$ содержит p-группу в том и только в том случае, когда она делима. Поэтому для всякой p-группы A выполнено $\mathrm{W}_F(A) = \mathbf{d}(A)$.

3) $\psi^F(p) = n$. Тогда по лемме 6.1 получаем, что $\mathbf{Z}(p^\infty) \notin \mathcal{T}(F)$. Итак, класс $\mathcal{T}(F)$ не содержит ненулевых p-групп, так что имеем $\mathrm{W}_F(A) = 0$ для произвольной p-группы A.

Тем самым доказано, что если группа F не является периодической, то действие идемпотентного радикала $\rho = \mathrm{W}_F$ на произвольную абелеву группу A описывается формулой

$$\rho(A) = \Big(\bigoplus_{p\mapsto l} A_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{d}(A_p)\Big). \tag{11}$$

Отметим два частных случая: если $F = \mathbf{Q}$, то $\mathrm{W}_F = \mathbf{t}$; если же $F = \mathbf{Q}^{(p)}$ (группа рациональных чисел, знаменатели которых — степени простого числа p), то $\mathrm{W}_F = \mathbf{t}_p$.

Обратно, всякий предрадикал вида (11) является $\mathrm{T}(F)$-радикалом для некоторой непериодической группы F. Через $\mathcal{L}_1$ мы обозначим множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, которые порождаются непериодическими группами F. Выше фактически было установлено взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{L}_1$ и множеством всех функций $\psi\colon P \to M_1$ (чтобы убедиться, что разным функциям соответствуют разные радикалы W_F, достаточно посмотреть, как эти радикалы действуют на циклические и квазициклические группы).

Введём на M_1 отношение порядка: $n \leqslant m \leqslant l$. Далее, пусть M_1^P есть множество, состоящее из всех последовательностей вида

$$\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_p, \dots), \tag{12}$$

члены которых занумерованы простыми числами и входят в M_1. На M_1^P естественным образом задаётся частичный порядок: будем считать, что $\alpha \leqslant \beta$ в том и только в том случае, когда $\alpha_p \leqslant \beta_p$ для всякого простого числа p. Легко заметить, что относительно этого порядка M_1^P является полной дистрибутивной решёткой.

Определим отображение $\varphi_1 \colon \mathcal{L}_1 \to M_1^P$ следующим образом:

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) = \bigl(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\bigr). \tag{13}$$

В силу проведённых ранее рассуждений такое отображение, во-первых, определено корректно, а во-вторых, является биекцией.

Теорема 6.3. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_1$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_1 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_1$ служат радикалы* $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ *и* $\mathbf{t}$ *соответственно.*

Доказательство. Имеют место следующие эквивалентности:

$$\varphi_1(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_1(\mathrm{W}_G) \iff \psi^F(p) \leqslant \psi^G(p) \text{ для любого } p \in P \iff$$
$$\iff \mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{W}_G(A) \text{ для любой } p\text{-группы } A \overset{(9)}{\iff} \mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G\,.$$

Итак, отображение φ_1 есть изоморфизм частично упорядоченных множеств. Следовательно, оно является также изоморфизмом решёток [11]. Отсюда можно заключить, что $\mathcal{L}_1$ — полная дистрибутивная решётка. Её наименьший и наибольший элементы очевидны. □

Следующее предложение показывает, что каждый радикал из $\mathcal{L}_1$ можно представить как $\mathrm{E}(V)$-радикал.

Предложение 6.4. *Радикал* W_F*, определяемый равенством (11), совпадает с радикалом* H_V*, где*

$$V = V(\psi^F) = \Big(\bigoplus_{p\mapsto l} \mathbf{Z}(p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{Z}(p^\infty)\Big). \qquad (14)$$

Доказательство. Из равенства $\mathrm{W}_F(V) = V$ получаем $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{W}_F$. Предположим теперь, что $A \in \mathcal{T}(F)$. Это значит, что группа A периодическая, причём её p-компоненты A_p делимы для всех p таких, что $\psi^F(p) = m$, и равны нулю для всех p таких, что $\psi^F(p) = n$. Несложно проверить, что H_V-полупростая факторгруппа $B = A/\mathrm{H}_V(A)$ обладает аналогичными свойствами. Но тогда равенство $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ возможно лишь при $B = 0$. Итак, $\mathrm{H}_V(A) = A$, так что по предложению 1.8 имеем $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{H}_V$. Доказательство завершено. $\square$

Через $\mathcal{IR}$ обозначим совокупность всех идемпотентных радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$. Как мы уже знаем, $\mathcal{IR}$ — полная большая решётка.

Предложение 6.5. $\mathcal{L}_1$ *является полной подрешёткой в* $\mathcal{IR}$*.*

Доказательство. Пусть $\{\mathrm{W}_i\}_{i\in I}$ — какое-то подмножество в $\mathcal{L}_1$. В силу предложения 3.12 пересечение (в смысле (2a)) всех радикалов из этого подмножества также принадлежит $\mathcal{L}_1$. Далее, положим

$$\rho(A) = \sum_{i\in I} \mathrm{W}_i(A)$$

для всех A. Очевидно, что тогда ρ тоже имеет вид (11), так что $\rho \in \mathcal{L}_1$. Легко видеть, что ρ — наименьший из всех идемпотентных радикалов, для которых $\mathrm{W}_i \leqslant \rho$ при всех $i \in I$. Отсюда следует, что он совпадает с объединением (в смысле (2b)) всех радикалов W_i. Итак, $\mathcal{L}_1$ является полной подрешёткой большой решётки $\mathcal{IR}$. $\square$

Замечание. Вспоминая теорему 1.14, несложно заметить, что $\mathcal{L}_1$ совпадает с множеством всех идемпотентных радикалов ρ, для которых

$\rho \leqslant \mathbf{t}$. Поэтому любой идемпотентный радикал, который удовлетворяет данному неравенству, представи́м в виде $\mathrm{T}(F)$-радикала для некоторой непериодической группы F.

Пусть теперь F — ненулевая p-группа. Возможны два случая.
1) Группа F не является делимой. Это означает, что класс $\mathcal{T}(F)$ состоит в точности из всех p-делимых групп (лемма 6.1).
2) F — делимая группа. Тогда $\mathcal{T}(F)$ состоит из всех групп A таких, что факторгруппа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является p-делимой.
Очевидно, что если $F = 0$, то класс $\mathcal{T}(F)$ содержит все абелевы группы и для всякой группы A имеем $\mathrm{W}_F(A) = A$.

Предположим теперь, что F — некоторая периодическая группа, $F = \bigoplus\limits_{p \in P} F_p$. В соответствии с равенством (5) имеем

$$\mathcal{T}(F) = \bigcap_{p \in P} \mathcal{T}(F_p). \tag{15}$$

Пусть M_2 обозначает множество, состоящее из трёх элементов λ, μ и ν. Определим функцию $\psi^F \colon P \to M_2$ по следующему правилу:

$$\psi^F(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p\text{-компонента } F_p \text{ не является делимой;} \\ \mu, & \text{если } F_p \text{ — ненулевая делимая группа;} \\ \nu, & \text{если } F_p = 0. \end{cases}$$

Для произвольной функции $\psi \colon P \to M_2$ можно найти абелеву группу F такую, что $\psi^F = \psi$. Примером служит

$$F = F(\psi) = \Big(\bigoplus_{p \mapsto \lambda} \mathbf{Z}(p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto \mu} \mathbf{Z}(p^\infty)\Big). \tag{16}$$

Группа A входит в класс $\mathcal{T}(F)$ в том и только в том случае, когда группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является p-делимой для всех p таких, что $\psi^F(p) = \mu$, а сама группа A — p-делимой для всех p таких, что $\psi^F(p) = \lambda$ (в частности, делимые группы обязательно являются $\mathrm{T}(F)$-группами). Значит,

$\mathrm{W}_F(A)$ — это наибольшая подгруппа группы A, обладающая данными свойствами (её можно найти как сумму всех таких подгрупп). Так, если группа F совпадает с прямой суммой всех циклических групп простого порядка $\bigoplus\limits_{p\in P}\mathbf{Z}(p)$, то $\mathcal{T}(F)$ есть класс всех делимых групп и $\mathrm{W}_F = \mathbf{d}$.

Обратно, произвольный класс абелевых групп такого вида совпадает с классом $\mathcal{T}(F)$ для подходящей периодической группы F. Пусть $\mathcal{L}_2$ есть множество всех $\mathrm{T}(F)$-радикалов, порождаемых периодическими группами F. Выше мы установили взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{L}_2$ и множеством всех функций $\psi\colon P \to M_2$ (радикалы, которые соответствуют разным функциям, различаются, например, тем, как они действуют на рациональные и/или циклические группы).

Введём на M_2 отношение порядка: $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$. Обозначим через M_2^P множество, которое состоит из всех последовательностей вида (12) с членами из M_2. На M_2^P вводится частичный порядок: $\alpha \leqslant \beta$ в том и только в том случае, когда $\alpha_p \leqslant \beta_p$ для всех $p \in P$. Относительно этого порядка M_2^P является полной дистрибутивной решёткой.

Отображение $\varphi_2\colon \mathcal{L}_2 \to M_2^P$ определим по аналогии с (13):

$$\varphi_2(\mathrm{W}_F) = \bigl(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\bigr). \tag{17}$$

Как было показано выше, это отображение является биекцией.

Теорема 6.6. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_2$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ_2 есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}_2$ служат радикалы $\mathbf{d}$ и $\mathrm{W}_0 = 1$ соответственно.*

Доказательство. Как и в теореме 6.3, достаточно доказать, что φ_2 есть изоморфизм частично упорядоченных множеств, т.е. убедиться в равносильности неравенств $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$ и $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$ для периодических абелевых групп F и G. Наименьший и наибольший элементы множества $\mathcal{L}_2$ находятся в соответствии с определением φ_2.

Пусть $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$. В этом случае $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$ для любого простого p. Таким образом, $\mathcal{T}(F_p) \subset \mathcal{T}(G_p)$. Учитывая равенство (15), получаем, что $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(G)$ и, следовательно, $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Обратно, пусть $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$. Предположим, что $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \nleqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$, т.е. существует простое число p, для которого $\psi^F(p) > \psi^G(p)$. Имеем две различные возможности.

1) $\psi^F(p) = \nu$, $\psi^G(p) \in \{\lambda, \mu\}$. Тогда $F_p = 0$, $G_p \neq 0$. Отсюда следует, что группа $\mathbf{Q}_p$ всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, входит в $\mathcal{T}(F)$, но не входит в $\mathcal{T}(G)$. Значит, $\mathcal{T}(F) \not\subset \mathcal{T}(G)$.

2) $\psi^F(p) = \mu$, $\psi^G(p) = \lambda$. В этом случае F_p — ненулевая делимая группа, а группа G_p не является делимой. Поэтому $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$ и $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(G)$. Следовательно, $\mathcal{T}(F) \not\subset \mathcal{T}(G)$.

В обоих случаях получили, что $\mathrm{W}_F \nleqslant \mathrm{W}_G$, а это противоречит нашему предположению. Таким образом, $\varphi_2(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi_2(\mathrm{W}_G)$. $\square$

Предложение 6.7. *Пусть F — периодическая группа. Тогда W_F совпадает с радикалом H_V, где*

$$V = V(\psi^F) = \mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto \mu} \mathbf{Z}(p)\Big). \tag{18}$$

(Если $\psi^F(p) = \nu$ для всех $p \in P$, то считаем, что $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} = \mathbf{Z}$.)

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{W}_F(V) = V$. Поэтому $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{W}_F$. Пусть теперь $A \in \mathcal{T}(F)$. Это значит, что $B = A/\,\mathrm{H}_V(A) \in \mathcal{T}(F)$. Следовательно, группа B является p-делимой для всех p таких, что $\psi^F(p) = \lambda$. Кроме того, факторгруппа $B/\,\mathbf{t}(B)$ является p-делимой для всех p таких, что $\psi^F(p) = \mu$. С другой стороны, $B \in \mathcal{E}(V)$, так что $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$.

Пусть p — некоторое простое число. Рассмотрим три случая.

1) $\psi^F(p) = \lambda$. Тогда p-компонента B_p делима. Поскольку группа $\mathbf{Z}(p^\infty)$ является гомоморфным образом группы $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$, равенство $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ возможно лишь в случае $B_p = 0$.

2) $\psi^F(p) = \mu$. Если $B_p \neq 0$, то $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p), B_p) \neq 0$, а это противоречит равенству $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$. Следовательно, $B_p = 0$.
3) $\psi^F(p) = \nu$. Группа $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$ имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом, так что из условия $\mathrm{Hom}(V, B) = 0$ следует $B_p = 0$.

Мы показали, что B — группа без кручения. Она p-делима для всех p таких, что $\psi^F(p) \in \{\lambda, \mu\}$. Поэтому равенство $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}, B) = 0$ возможно лишь при $B = 0$. Следовательно, $\mathrm{H}_V(A) = A$. Итак, $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{H}_V$, что завершает доказательство предложения. $\square$

Покажем, что аналог предложения 6.5 для $\mathcal{L}_2$ не выполняется.

Пример 6.8. Пусть $\rho_1 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(2)}$, $\rho_2 = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(3)}$ и ρ есть объединение радикалов ρ_1 и ρ_2 в решётке $\mathcal{L}_2$. В этом случае

$$\varphi_2(\rho) = \varphi_2(\rho_1) \vee \varphi_2(\rho_2) = (\lambda, \nu, \nu, \dots) \vee (\nu, \lambda, \nu, \dots) = (\nu, \nu, \nu, \dots).$$

Таким образом, ρ совпадает с радикалом $\mathrm{W}_0 = 1$, т.е. для произвольной группы A выполнено $\rho(A) = A$.

С другой стороны, из предложения 6.7 нам известно, что ρ_1 и ρ_2 совпадают с E-радикалами H_V и H_U, где $V = \mathbf{Q}^{(2)}$, $U = \mathbf{Q}^{(3)}$. Поэтому объединение этих радикалов (в смысле (2b)) есть $\mathrm{E}(V \oplus U)$-радикал, а он отличен от ρ. Тем самым доказано, что $\mathcal{L}_2$ не является подрешёткой большой решётки $\mathcal{IR}$.

Предложения 6.4 и 6.7 показывают, что всякий T-радикал можно представить в виде E-радикала. Пусть отображение $\chi\colon M_1 \to M_2$ переводит элементы l, m, n соответственно в λ, μ, ν. Несложно убедиться, что χ — антиизоморфизм решёток. Он индуцирует антиизоморфизм решёток M_1^P и M_2^P и, далее, антиизоморфизм $\overline{\chi}\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

На некую двойственность T-радикалов и E-радикалов указывает

Теорема 6.9. *Пусть $\rho_1 \in \mathcal{L}_1$ и $\overline{\chi}(\rho_1) = \rho_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда найдутся группы F и G такие, что $\rho_1 = \mathrm{W}_F = \mathrm{H}_G$ и $\rho_2 = \mathrm{W}_G = \mathrm{H}_F$.*

Доказательство. В силу рассуждений, которые были проведены в начале параграфа, условие $\rho_1 = \mathrm{W}_F$ будет выполнено, если положить

$$F = F(\psi) = \mathbf{Q}^{(lm)} \oplus \Big(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{Z}(p)\Big),$$

где $\psi\colon P \to M_1$ — функция, соответствующая T-радикалу ρ_1. Из определения отображения $\overline{\chi}$ следует, что радикальный класс T-радикала ρ_2 содержит в точности те абелевы группы A, для которых факторгруппа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является p-делимой при всех простых p таких, что $\psi(p) = m$, а сама группа A — p-делимой при всех p таких, что $\psi(p) = l$. Равенство $\rho_2 = \mathrm{W}_G$ выполнено, в частности, для группы

$$G = G(\psi) = \Big(\bigoplus_{p\mapsto l} \mathbf{Z}(p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\mapsto m} \mathbf{Z}(p^\infty)\Big).$$

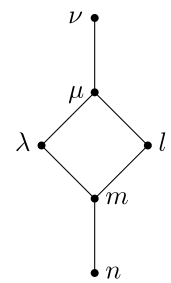
Сравнивая F и G соответственно с (18) и (14), получаем, что $\rho_1 = \mathrm{H}_G$ и $\rho_2 = \mathrm{H}_F$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Ямбор [25, 26] изучал *тензорно-ортогональные теории* над коммутативным кольцом S — пары $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ классов S-модулей такие, что $\mathcal{R}_1^\perp = \mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}_2^\perp = \mathcal{R}_1$ (через $\mathcal{R}^\perp$ условимся обозначать класс всех S-модулей A, для которых $A \otimes_S B = 0$ при любом $B \in \mathcal{R}$). Ясно, что класс $\mathcal{R}^\perp$ всегда является радикальным (соответствующее рассуждение проводится по аналогии с доказательством предложения 3.2). Отметим, что теорема 6.9 позволяет получить описание тензорно-ортогональных теорий категории абелевых групп, приведённое Ямбором в [25]. Можно переформулировать это описание так: тензорно-ортогональные теории в mod-$\mathbf{Z}$ — это в точности все пары вида $(\mathcal{R}(\rho_1), \mathcal{R}(\rho_2))$, где $\overline{\chi}(\rho_1) = \rho_2$.

В самом деле, из условия $G \in \mathcal{R}(\rho_1)$ непосредственно следует, что $(\mathcal{R}(\rho_1))^\perp \subset \{G\}^\perp = \mathcal{T}(G) = \mathcal{R}(\rho_2)$. Кроме того, $\mathcal{R}(\rho_1) = \mathcal{T}(F)$, поэтому $F \in (\mathcal{R}(\rho_1))^\perp$. Применяя предложения 3.10 и 1.8, получаем включение $\mathcal{R}(\rho_2) \subset (\mathcal{R}(\rho_1))^\perp$, откуда следует равенство этих двух классов. Точно так же доказывается равенство $(\mathcal{R}(\rho_2))^\perp = \mathcal{R}(\rho_1)$.

Обратно, всякая тензорно-ортогональная теория $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ в mod-$\mathbf{Z}$ имеет вид $(\mathcal{R}(\rho_1), \mathcal{R}(\rho_2))$, где $\overline{\chi}(\rho_1) = \rho_2$. Действительно, по лемме 6.1 по крайней мере один из классов $\mathcal{R}_i$ (пусть это будет $\mathcal{R}_1$) не содержит непериодических групп. Тогда $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(\rho_1)$ для некоторого $\rho_1 \in \mathcal{L}_1$. Так как тензорно-ортогональная теория однозначно определяется любым из своих классов, получаем, что $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}(\overline{\chi}(\rho_1))$.

Введём обозначение $M = M_1 \cup M_2 = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$. Порядок, имеющийся на M_1 и M_2, мы дополним условиями $m \leqslant \lambda$ и $l \leqslant \mu$ (элементы l и λ считаются несравнимыми). Легко заметить, что определяемое таким образом частично упорядоченное множество M является полной дистрибутивной решёткой. Более того, полной дистрибутивной решёткой является множество M^P всех последовательностей вида (12) с членами из M. Рассмотрим его подмножество $\mathcal{M} = M_1^P \cup M_2^P$. Оно является полной подрешёткой в M^P. В самом деле, объединение любого семейства элементов из $\mathcal{M}$ входит в множество M_2^P, если туда входит хоть один из элементов семейства; в противном случае это объединение есть элемент множества M_1^P. Аналогичное утверждение справедливо и для пересечения. Итак, $\mathcal{M}$ — полная дистрибутивная решётка.



Обозначим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Заметим, что $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \varnothing$. Действительно, радикальные классы T-радикалов из $\mathcal{L}_1$ содержат лишь периодические группы, в то время как в радикальный класс T-радикала из $\mathcal{L}_2$ входит по меньшей мере группа $\mathbf{Q}$. Для всякой группы F определена функция $\psi^F \colon P \to M$, при этом для непериодических групп имеет место включение $\psi^F(P) \subset M_1$, а для периодических — $\psi^F(P) \subset M_2$. Биективное отображение $\varphi \colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ определим по аналогии с (13) и (17):

$$\varphi(\mathrm{W}_F) = \bigl(\psi^F(2), \psi^F(3), \psi^F(5), \dots, \psi^F(p), \dots\bigr).$$

На каждом из множеств $\mathcal{L}_i$ оно действует так же, как и φ_i.

Теорема 6.10. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$ является полной дистрибутивной решёткой; отображение φ есть изоморфизм решёток. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}$ служат радикалы* $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ *и* $\mathrm{W}_0 = 1$ *соответственно.*

Доказательство. Ясно, что наименьший и наибольший элементы $\mathcal{L}$ совпадают соответственно с нулём и единицей большой решётки $\mathcal{IR}$. Докажем эквивалентность неравенств $\varphi(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$ и $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Допустим, что $\varphi(\mathrm{W}_F) \leqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$, где $\varphi(\mathrm{W}_F) \in M_i^P$ и $\varphi(\mathrm{W}_G) \in M_j^P$. В теоремах 6.3 и 6.6 был рассмотрен случай $i = j$; случай $i = 2$, $j = 1$ невозможен в силу того, как задавался порядок на M. Остаётся случай $i = 1$, $j = 2$. Для всякого простого числа p выполнено $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$. Пусть $A \in \mathcal{T}(F)$, тогда A — периодическая группа. Рассмотрим теперь произвольное простое p. Возможны два случая.

1) $\psi^F(p) = l$, $\psi^G(p) \in \{\mu, \nu\}$. Тогда p-компонента G_p делима. Поскольку группа G периодическая, отсюда следует $A_p \otimes G = 0$.

2) $\psi^F(p) \in \{m, n\}$. Это значит, что делимой является p-компонента A_p. Следовательно, $A_p \otimes G = 0$.

В обоих случаях получили, что $A_p \in \mathcal{T}(G)$. Поэтому $A \in \mathcal{T}(G)$. Таким образом, доказано включение $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(G)$ и вместе с ним неравенство $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$.

Обратно, пусть $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$, где $\mathrm{W}_F \in \mathcal{L}_i$ и $\mathrm{W}_G \in \mathcal{L}_j$. Случай $i = j$ рассматривался ранее, случай $i = 2$, $j = 1$ невозможен (см. замечание перед теоремой). Разберём теперь случай $i = 1$, $j = 2$. Допустим, что $\varphi(\mathrm{W}_F) \nleqslant \varphi(\mathrm{W}_G)$. Это означает, что для некоторого простого числа p условие $\psi^F(p) \leqslant \psi^G(p)$ не выполнено. Такое возможно только в случае $\psi^F(p) = l$, $\psi^G(p) = \lambda$. Следовательно, группа F является p-делимой, а группа G — нет (поскольку делимой не является её p-компонента G_p). Поэтому $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{T}(F)$, $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{T}(G)$. Таким образом, $\mathcal{T}(F) \not\subset \mathcal{T}(G)$, а это противоречит нашему предположению. Теорема доказана. □

Итак, мы получили описание всех Т-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ и образуемой ими решётки.

Пример 6.11. Убедимся, что сама большая решётка $\mathcal{IR}$ не является не только дистрибутивной, но и модулярной. Для этого мы укажем идемпотентные радикалы ρ, σ и τ такие, что $(\rho \vee \sigma) \wedge \tau \neq \rho \vee (\sigma \wedge \tau)$ и $\rho \leqslant \tau$. Пусть p, q, r — различные простые числа. Подгруппы B, C, D группы $\mathbf{Q} \oplus \mathbf{Q}$ зададим следующими равенствами:

$$B = \big\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{Q}^{(p)}\big\}, \qquad C = \big\{(0, x) \mid x \in \mathbf{Q}^{(q)}\big\},$$
$$D = \big\{(x, x) \mid x \in \mathbf{Q}^{(r)}\big\};$$

положим $A = B + C + D$.

Определим гомоморфизм $\varphi\colon A \to \mathbf{Q}$, полагая $\varphi(x, y) = y$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Im}\varphi = \mathbf{Q}^{(q)} + \mathbf{Q}^{(r)} = \mathbf{Q}^{(qr)}$ (группа всех рациональных чисел, знаменателями которых являются произведения степеней чисел q и r) и $\operatorname{Ker}\varphi = B$. Таким образом, $A/B \cong \mathbf{Q}^{(qr)}$. Обозначим $\mathrm{E}(A/B)$-радикал, $\mathrm{E}(B)$-радикал и $\mathrm{E}(A)$-радикал соответственно ρ, σ и τ. Из равенства $\tau(A/B) = A/B$ следует, что $\rho \leqslant \tau$.

Ясно, что $A/B \in \mathcal{R}(\rho)$ и $B \in \mathcal{R}(\sigma)$. Отсюда сразу получаем, что A/B и B входят в $\mathcal{R}(\rho \vee \sigma)$. Учитывая очевидное включение $A \in \mathcal{R}(\tau)$, а также замкнутость радикальных классов относительно расширений, приходим к равенству $\big[(\rho \vee \sigma) \wedge \tau\big](A) = A$.

Из $\operatorname{Hom}(A/B, A) = 0$ следует $\rho(A) = 0$. Найдём теперь подгруппу $X = (\sigma \wedge \tau)(A)$. Ясно, что $X \subset \tau(\sigma(A))$. Далее, $\operatorname{Hom}(B, A/B) = 0$; значит, $A/B \in \mathcal{E}(B)$ и $\sigma(A) \subset B$. Получили, что $X \subset \tau(B)$. Докажем равенство $\operatorname{Hom}(A, B) = 0$. В самом деле, $\operatorname{Hom}(C, B) = \operatorname{Hom}(D, B) = 0$, т.е. сужение любого гомоморфизма $A \to B$ на $C + D$ равно нулю. А так как $C + D$ имеет ненулевое пересечение с ненулевыми циклическими подгруппами из A, то и сам такой гомоморфизм может быть только нулевым. Таким образом, $\tau(B) = 0$, следовательно, $\big[\rho \vee (\sigma \wedge \tau)\big](A) = X = 0$.

Выясним теперь, насколько «плотно» радикалы W_F расположены в большой решётке $\mathcal{IR}$. Радикальный класс идемпотентного радикала ρ, для которого $\mathbf{d} \leqslant \rho$ и $\mathbf{t} \leqslant \rho$, содержит (с учётом замкнутости относительно расширений) все группы A такие, что факторгруппа $A/\,\mathbf{t}(A)$ является делимой. Следовательно, в этом случае выполнено неравенство $\varphi^{-1}(\mu, \mu, \mu, \ldots) \leqslant \rho$, т.е. обозначение $\mathbf{d} \vee \mathbf{t}$ имеет одинаковый смысл в $\mathcal{L}$ и в $\mathcal{IR}$. Учитывая предложение 3.12 и включения $\mathbf{d}, \mathbf{t} \in \mathcal{L}$, то же можно сказать и о $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$.

Предложение 6.12. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Тогда*
(а) если $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d}$, то $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d}$;
(б) если $\mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \mathbf{t}$ или $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$;
(в) если $\rho \leqslant \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{l, m, n\}$;
(г) если $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, то $\rho = \varphi^{-1}(\alpha)$, где α — некоторая последовательность вида (12) с членами из $\{\lambda, \mu\}$.

Доказательство. (а) Пусть $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho < \mathbf{d}$. По следствию 1.13 мы получаем, что $\mathcal{R}(\rho)$ содержит лишь периодические группы, т.е. $\rho \leqslant \mathbf{t}$. Это значит, что $\rho \leqslant \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ и, далее, $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$. Таким образом, интервал $[\mathbf{d} \wedge \mathbf{t}, \mathbf{d}]$ большой решётки $\mathcal{IR}$ является простым.

(б) Предположим, что $\mathbf{t} < \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$. Тогда класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы, так что $\mathbf{d} \leqslant \rho$. Следовательно, $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$.

(в) См. замечание после предложения 6.5.

(г) Пусть $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$. Определим функцию $\psi\colon P \to M_2$:

$$\psi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho); \\ \mu, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho). \end{cases}$$

Соответствующий этой функции $\mathrm{T}(F)$-радикал обозначим ρ'.

Покажем, что $\rho \leqslant \rho'$. Пусть $A \in \mathcal{R}(\rho)$, в этом случае из неравенства $\rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$ следует, что группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ делима. Кроме того, для всякого p

такого, что $\psi(p) = \lambda$, группа A является p-делимой (в противном случае A имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом и, следовательно, $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$, что приводит к противоречию). Итак, $A \in \mathcal{T}(F)$, что и требовалось.

Из предложения 6.7 мы знаем, что ρ' совпадает с H_V, где

$$V = V(\psi) = \mathbf{Q} \oplus \Big(\bigoplus_{p \mapsto \mu} \mathbf{Z}(p)\Big).$$

Учитывая определение функции ψ, имеем $V \in \mathcal{R}(\rho)$. Отсюда получаем неравенство $\rho' \leqslant \rho$. Таким образом, $\rho = \rho'$, что завершает доказательство предложения. $\square$

§7. Свойства замкнутости классов $\mathrm{T}(\boldsymbol{F})$-групп

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства замкнутости классов абелевых групп и выясним, при каких условиях $\mathcal{T}(F)$ обладает или не обладает этими свойствами. Так, в §3 отмечалось, что в общем случае класс $\mathcal{T}(F)$ не является замкнутым относительно взятия прямых произведений. Убедимся в этом на примере абелевых групп.

Предложение 7.1. *Класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно прямых произведений тогда и только тогда, когда $\psi^F(P) \subset \{n, \lambda, \nu\}$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1) Пусть F — непериодическая группа. Если $\varphi(\mathrm{W}_F) = (n, n, n, \dots)$, то $\mathrm{W}_F = 0$, так что замкнутость $\mathcal{T}(F)$ относительно прямых произведений очевидна. Если же для некоторого простого числа p выполнено $\psi^F(p) \in \{l, m\}$, то имеем $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{T}(F)$. Зададим группу A как прямое произведение некоторого бесконечного семейства копий $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Ясно, что группа A не является периодической. Поэтому $A \notin \mathcal{T}(F)$.

2) Пусть F — периодическая группа. Если $\psi^F(P) \subset \{\lambda, \nu\}$, то $\mathcal{T}(F)$ есть класс всех абелевых групп A, являющихся p-делимыми для всех p таких, что $\psi^F(p) = \lambda$, а такой класс, очевидно, замкнут относительно прямых произведений. Пусть теперь для некоторого простого p выполнено $\psi^F(p) = \mu$. В этом случае примарная компонента F_p делима и для всякого натурального k имеем $A_k = \mathbf{Z}(p^k) \in \mathcal{T}(F)$. Зададим группу A как прямое произведение всех таких групп A_k. Через a_k мы обозначим образующие элементы циклических групп A_k; тогда, как легко видеть, элемент $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) + \mathbf{t}(A)$ факторгруппы $A/\,\mathbf{t}(A)$ не делится на p. Итак, группа $A/\,\mathbf{t}(A)$ не является p-делимой, т.е. $A \notin \mathcal{T}(F)$. $\square$

Как нам известно, идемпотентный радикал ρ является кручением, если радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно взятия подгрупп. Имеем следующее

Предложение 7.2. *Пусть F — абелева группа. Эквивалентны следующие условия:*
1) n_F *— кручение;*
2) W_F *— кручение;*
3) $\psi^F(P) \subset \{l, n, \nu\}$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) непосредственно следует из равенств $\mathrm{W}_F = \widehat{\mathrm{n}}_F = \mathrm{n}_F$. Для доказательства импликации 2) $\Rightarrow$ 3) достаточно сопоставить полученное ранее описание $\mathrm{T}(F)$-радикалов с утверждением теоремы 1.9.

3) $\Rightarrow$ 1). Если выполнено $\varphi(\mathrm{W}_F) = (\nu, \nu, \nu, \dots)$, то $F = 0$ и, следовательно, $\mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F = 1$. Допустим теперь, что $\psi^F(P) \subset \{l, n\}$. Введём обозначение $G = F/\,\mathbf{t}(F)$. Поскольку G является гомоморфным образом группы F, то для всякой группы A имеем $\mathrm{n}_F(A) \subset \mathrm{n}_G(A)$. Применяя предложение 3.7 к плоской группе G, получаем $\mathrm{n}_G = \mathrm{W}_G$. Из условия $m \notin \psi^F(P)$ следует $\psi^F = \psi^G$; приходим к равенству $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_G$. Итак, $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{n}_G = \mathrm{W}_G = \mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{n}_F$, т.е. n_F совпадает с кручением W_G. □

Мы доказали, что в категории mod-$\mathbf{Z}$ условия «W_F — кручение» и «n_F — кручение» эквивалентны. Убедимся, что в общем случае такая эквивалентность не имеет места.

Пример 7.3. Пусть S — кольцо вычетов по модулю p^k (где $k > 1$), $F = \mathbf{Z}(p)$. Модули над кольцом S — это просто прямые суммы циклических p-групп, порядок которых не превышает p^k. Поэтому для всякого ненулевого S-модуля A справедливо неравенство $A \otimes_S F \neq 0$. Тогда для любого $A \in$ mod-S имеем $\mathrm{W}_F(A) = 0$, так что W_F — кручение. С другой стороны, $pA \subset \mathrm{n}_F(A)$, т.е. радикал n_F не совпадает с W_F и потому не является кручением.

Лемма 7.4. *Пусть F — абелева группа. Тогда*
(a) класс $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно сервантных подгрупп;

(б) если F — p-группа, то $\mathcal{T}(F)$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп.

Доказательство. Если B — сервантная подгруппа группы A, то по теореме 2.12 группа $A \otimes F$ содержит подгруппу, изоморфную $B \otimes F$. Поэтому из $A \in \mathcal{T}(F)$ следует $B \in \mathcal{T}(F)$. Аналогично рассматривается случай, когда F — p-группа. $\square$

Мы докажем, что утверждение (а) леммы 7.4 является обратимым. В следующей теореме устанавливается, что свойство замкнутости радикального класса относительно взятия сервантных подгрупп является для T-радикалов характеристическим. Описание идемпотентных радикалов, имеющих это свойство, в терминах E-радикалов несколько иным путём дал Гарднер [19]. Покажем, что это в точности все T-радикалы.

Теорема 7.5. *Для идемпотентного радикала $\rho \in \mathcal{IR}$ следующие условия эквивалентны:*
1) класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно сервантных подгрупп;
2) $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно рациональных сервантных подгрупп;
3) существует группа F такая, что $\rho = \mathrm{W}_F$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно рациональных сервантных подгрупп. Если $\rho \leqslant \mathbf{t}$ (в этом случае, конечно, бессмысленно говорить о рациональных подгруппах ρ-радикальных абелевых групп), то радикал ρ имеет вид (11) и совпадает с одним из $\mathrm{T}(F)$-радикалов.

Пусть теперь $\rho \nleqslant \mathbf{t}$, т.е. $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы. Определим функцию $\psi\colon P \to M_2$ следующим образом:

$$\psi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho); \\ \mu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \notin \mathcal{R}(\rho) \text{ и } \mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho); \\ \nu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \in \mathcal{R}(\rho). \end{cases}$$

Положим $\rho' = \mathrm{W}_F$, где F задаётся формулой (16).

Покажем, что $\rho \leqslant \rho'$. Пусть $A \in \mathcal{R}(\rho)$, тогда по предложению 1.10 получаем, что $\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ и $A/\,\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$. Рассмотрим теперь произвольное простое число p. Если $\psi(p) \in \{\mu, \nu\}$, то $A_p \otimes F = 0$. Если же $\psi(p) = \lambda$, то группа A_p делима (иначе из $A_p \in \mathcal{R}(\rho)$ следовало бы $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$, что противоречит выбору функции ψ), поэтому $A_p \otimes F = 0$. В обоих случаях $A_p \in \mathcal{T}(F)$, следовательно, $\mathbf{t}(A) \in \mathcal{T}(F)$.

Обозначим $B = A/\,\mathbf{t}(A)$. Допустим, что $B \notin \mathcal{T}(F)$. Тогда существует простое число p такое, что $\psi(p) \in \{\lambda, \mu\}$ и группа B не является p-делимой. Это означает, что B содержит элемент b, имеющий нулевую p-высоту. Несложно проверить, что тогда $\langle b \rangle_*$ (наименьшая сервантная подгруппа группы B, содержащая элемент b) вкладывается в группу $\mathbf{Q}_p$. Эта подгруппа является рациональной, так что $\langle b \rangle_* \in \mathcal{R}(\rho)$ и, значит, $\rho(\mathbf{Q}_p) \neq 0$. По следствию 1.12 получаем $\rho(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$, что противоречит условию $\psi(p) \neq \nu$. Итак, мы показали, что $B \in \mathcal{T}(F)$ и, следовательно, $A \in \mathcal{T}(F)$. Из включения $\mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{T}(F)$ получаем неравенство $\rho \leqslant \mathrm{W}_F$.

Докажем теперь, что $\rho' \leqslant \rho$. Сначала убедимся, что $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \in \mathcal{R}(\rho)$. Если множество всех простых чисел p, для которых $\psi(p) = \nu$, пусто, то $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} = \mathbf{Q}$, а по следствию 1.13 делимая группа $\mathbf{Q}$ входит в $\mathcal{R}(\rho)$. Предположим, что это множество не является пустым. Обозначим

$$A = \prod_{p \mapsto \nu} \mathbf{Q}_p, \qquad B = \bigoplus_{p \mapsto \nu} \mathbf{Q}_p$$

(здесь B понимается как подгруппа группы A).

Каково бы ни было простое число p, все сомножители группы A (возможно, кроме одного) являются p-делимыми. Поэтому группа A/B делима; при этом не исключено, что она равна нулю. Как уже отмечалось ранее, отсюда сразу следует включение $A/B \in \mathcal{R}(\rho)$. Поскольку, очевидно, $B \in \mathcal{R}(\rho)$, получаем, что $A \in \mathcal{R}(\rho)$. Множество A' элементов группы A, все координаты которых равны между собой, — сервантная подгруппа в A. Эта подгруппа рациональна и изоморфна группе $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)}$. Таким образом, $\mathbf{Q}^{(\lambda\mu)} \in \mathcal{R}(\rho)$.

Для любого простого p такого, что $\psi(p) = \mu$, имеем $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$. Следовательно, группа V, задаваемая равенством (18), входит в класс $\mathcal{R}(\rho)$. Это значит, что $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$. Из предложения 6.7 получаем $\mathrm{H}_V = \rho'$. Итак, $\rho = \rho'$.

3) $\Rightarrow$ 1). См. утверждение (a) леммы 7.4. $\square$

Следствие 7.6. *Пусть $\mathcal{F}$ — произвольный класс абелевых групп, $\mathcal{R}$ — класс всех групп A, для которых $A \otimes F = 0$ при всех $F \in \mathcal{F}$. Тогда существует группа F_0 такая, что $\mathcal{R} = \mathcal{T}(F_0)$.*

Доказательство. Очевидно, что класс $\mathcal{R}$ является радикальным (см. также предложение 3.2). Кроме того, он замкнут относительно сервантных подгрупп (рассуждение проводится аналогично доказательству утверждения (a) леммы 7.4). Это и означает, что он совпадает с классом всех $\mathrm{T}(F_0)$-групп для подходящей группы F_0. $\square$

Естественно поставить вопрос, какие радикальные классы будут получаться, если в условии теоремы 7.5 заменить сервантность одним из её обобщений. Описание радикальных классов, замкнутых относительно p-сервантных подгрупп, на языке E-радикалов было дано Ямбором [24] и Гарднером [21]. Мы опишем эти классы в терминах T-радикалов.

Предложение 7.7. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп в том и только в том случае, когда существует группа F такая, что $\rho = \mathrm{W}_F$, причём для произвольного простого числа q, отличного от p, выполнено $\psi^F(q) \in \{l, n, \nu\}$.*

Доказательство. Поскольку произвольная сервантная подгруппа является также p-сервантной, то в силу теоремы 7.5 каждый идемпотентный радикал, имеющий указанное свойство, совпадает с одним из

радикалов W_F. Поэтому остаётся выяснить, когда класс $\mathcal{T}(F)$ обладает требуемым свойством замкнутости. Допустим, что для какого-то $q \neq p$ условие $\psi^F(q) \in \{l, n, \nu\}$ не выполнено. Рассмотрим два случая.
1) $\psi^F(q) = m$. Тогда квазициклическая группа $\mathbf{Z}(q^\infty)$ входит в $\mathcal{T}(F)$, а её p-сервантная подгруппа $\mathbf{Z}(q)$ — нет.
2) $\psi^F(q) \in \{\lambda, \mu\}$. Тогда p-сервантная подгруппа $\mathbf{Q}^{(p)}$ группы $\mathbf{Q} \in \mathcal{T}(F)$ не входит в $\mathcal{T}(F)$ (поскольку $\mathbf{Q}^{(p)} \otimes F_q \neq 0$).
В обоих случаях мы получили, что класс $\mathcal{T}(F)$ не является замкнутым относительно p-сервантных подгрупп.

Обратно, предположим, что для всех простых чисел q, отличных от p, выполнено $\psi^F(q) \in \{l, n, \nu\}$. Опять имеем две возможности.

1) F — непериодическая группа. Пусть B обозначает некоторую p-сервантную подгруппу группы A, входящей в класс $\mathcal{T}(F)$. Группа A периодическая, так что группа B тоже периодическая, а её примарные компоненты суть p-сервантные подгруппы соответствующих компонент группы A. Пусть q — произвольное простое число. Если $\psi^F(q) \in \{l, n\}$, то из $A_q \in \mathcal{T}(F)$ следует, что $B_q \in \mathcal{T}(F)$. Если же выполнено $\psi^F(q) = m$, то $q = p$, а компонента A_p делима. Её p-сервантная подгруппа $B_p = B_q$ также делима, поэтому $B_q \in \mathcal{T}(F)$. Итак, $B \in \mathcal{T}(F)$.

2) F — периодическая группа. Так как для всех $q \neq p$ выполнено $\psi^F(q) = \nu$, получаем, что F — p-группа. Отсюда по лемме 7.4 следует замкнутость класса $\mathcal{T}(F)$ относительно взятия p-сервантных подгрупп. Предложение доказано. $\square$

Определение 7.8. *Слабо сервантной* назовём всякую подгруппу B группы A такую, что для любого $p \in P$ выполнено $pB = B \cap pA$.

Заметим, что сервантная подгруппа всегда слабо сервантна.

Предложение 7.9. *Пусть ρ — идемпотентный радикал. Радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно взятия слабо сервантных* *подгрупп тогда и только тогда, когда существует группа F такая, что $\rho = \mathrm{W}_F$, причём $\mu \notin \psi^F(P)$.*

Доказательство. Гарднер [21] показал, что радикальный класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно слабо сервантных подгрупп в том и только в том случае, когда выполнено одно из двух условий:
1) $\mathcal{R}$ содержит только периодические группы;
2) существует подмножество P_1 множества P такое, что $\mathcal{R}$ есть класс всех групп, являющихся p-делимыми для любого $p \in P_1$ (считается, что множество $P_1 = \varnothing$ даёт класс mod-$\mathbf{Z}$).
Вспоминая описание T-радикалов категории абелевых групп, получаем требуемое утверждение. $\square$

§8. «Решёточное» и «поточечное» пересечения $\mathrm{T}(\boldsymbol{F})$-радикалов

Цель данного параграфа — показать, что «решёточное» пересечение T-радикалов совпадает с их «поточечным» пересечением (где под «точками» понимаются абелевы группы). Учитывая предложение 3.12, достаточно проверить, что для произвольного прямого разложения

$$F = \bigoplus_{i \in I} F_i \tag{19}$$

и произвольной группы A справедливо равенство

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{W}_i(A) \tag{20}$$

(для краткости $\mathrm{T}(F_i)$-радикалы обозначаются просто W_i).

Чтобы доказать равенство (20), достаточно убедиться, что стоящее в правой части этого равенства пересечение (обозначим его через B) сервантно в A. В этом случае группа B является сервантной подгруппой в каждой из групп $\mathrm{W}_i(A)$; следовательно, по лемме 7.4 имеем $B \in \mathcal{T}(F_i)$ для любого $i \in I$. Тогда из равенства (5) можно сделать вывод, что B есть $\mathrm{T}(F)$-группа. В силу очевидного соотношения $\mathrm{W}_F(A) \subset B$ отсюда непосредственно следует (20).

Лемма 8.1. *Если A — p-группа, то равенство (20) справедливо для всякой группы F.*

Доказательство. Из описания $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ несложно вывести, что каждая из подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает хотя бы с одной из трёх подгрупп 0, $\mathbf{d}(A)$ или A (вообще говоря, в случае p-групп это справедливо для произвольного идемпотентного радикала). Поэтому пересечение всех подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает с одной из этих подгрупп и, значит, является прямым слагаемым (а также сервантной подгруппой) группы A. Отсюда сразу следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 8.2. *Если A — периодическая группа, то равенство (20) справедливо для всякой группы F.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 8.1 к примарным компонентам A_p группы A:

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigoplus_{p\in P} \mathrm{W}_F(A_p) = \bigoplus_{p\in P} \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A_p) =$$
$$= \bigcap_{i\in I} \bigoplus_{p\in P} \mathrm{W}_i(A_p) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A). \qquad \square$$

Лемма 8.3. *Если группа F непериодическая, то равенство (20) справедливо для всякой группы A.*

Доказательство. Если группа F непериодическая, то по крайней мере одна из групп F_i тоже не является периодической, т.е. хотя бы одна из групп $\mathrm{W}_i(A)$ должна содержаться в $\mathbf{t}(A)$. С учётом леммы 6.2 можно для любого $i \in I$ записать равенства

$$\mathrm{W}_i(\mathbf{t}(A)) = \mathbf{t}(\mathrm{W}_i(A)) = \mathrm{W}_i(A) \cap \mathbf{t}(A).$$

Применяя лемму 8.2 к периодической группе $\mathbf{t}(A)$, получаем

$$\bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A) = \Big(\bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(A)\Big) \cap \mathbf{t}(A) = \bigcap_{i\in I} \big(\mathrm{W}_i(A) \cap \mathbf{t}(A)\big) =$$
$$= \bigcap_{i\in I} \mathrm{W}_i(\mathbf{t}(A)) = \mathrm{W}_F(\mathbf{t}(A)) \subset \mathrm{W}_F(A),$$

откуда следует равенство (20). $\square$

Нам осталось рассмотреть случай, когда группа F периодическая, т.е. $F = \bigoplus\limits_{p\in P} F_p$.

Лемма 8.4. *Если группа F периодическая, то для произвольной группы A справедливо равенство*

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A)$$

(через W_p для удобства обозначены $\mathrm{T}(F_p)$-радикалы).

Доказательство. Зафиксируем произвольное простое число q и рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi\colon A \to A/A_q$. Введём некоторые вспомогательные обозначения: полагаем

$$B = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A), \qquad C = \bigcap_{p\in P} \bigl(\mathrm{W}_p(A) + A_q\bigr).$$

Покажем, что $C = B + A_q$. Для всякого простого числа p, отличного от q, имеем $A_q \otimes F_p = 0$; следовательно, $A_q \subset \bigcap_{p\neq q} \mathrm{W}_p(A)$. Таким образом,

$$C = \bigcap_{p\in P} \bigl(\mathrm{W}_p(A) + A_q\bigr) = \Bigl(\bigcap_{p\neq q} \mathrm{W}_p(A)\Bigr) \cap \bigl(\mathrm{W}_q(A) + A_q\bigr) = \\ = \bigcap_{p\in P} \mathrm{W}_p(A) + A_q = B + A_q$$

(здесь мы использовали модулярность решётки всех подгрупп заданной группы). Поэтому $\pi(B) = C/A_q$. Докажем теперь следующий факт: если X — сервантная подгруппа группы A, то $\pi(X)$ — сервантная подгруппа факторгруппы A/A_q.

Допустим, что для элементов $x \in X$, $a \in A$ и натурального числа n выполнено равенство $x + A_q = n(a + A_q)$. Тогда $x = na + b$, где порядок элемента b равен q^k для некоторого неотрицательного k. Следовательно, $q^k x = nq^k a$. Поскольку подгруппа X сервантна в A, можно заключить, что для некоторого $y \in X$ имеет место равенство $q^k x = nq^k y$. Из соотношения $x = ny + (x - ny)$ теперь следует, что $x + A_q = n(y + A_q)$. Итак, группа $\pi(X)$ действительно сервантна в факторгруппе A/A_q.

В частности, для любого простого p подгруппа $\pi(\mathrm{W}_p(A))$ группы A/A_q сервантна. Далее, группа A/A_q имеет нулевую q-компоненту, так что пересечение любого семейства q-сервантных подгрупп из A/A_q есть q-сервантная подгруппа. Значит, группа C/A_q, совпадающая с пересечением всех групп $\pi(\mathrm{W}_p(A))$, является q-сервантной подгруппой в A/A_q и, следовательно, в $\pi(\mathrm{W}_q(A))$. Поскольку, очевидно, $\pi(\mathrm{W}_q(A)) \in \mathcal{T}(F_q)$, то по лемме 7.4 получаем, что $C/A_q \in \mathcal{T}(F_q)$.

Итак, $\pi(B) \in \mathcal{T}(F_q)$. Далее, очевидно, что $\pi(B) \cong B/(B \cap \mathbf{t}_q(A))$. Учитывая тот факт, что для непериодических групп F равенство (20) уже доказано, несложно видеть, что пересечение $B \cap \mathbf{t}_q(A)$ совпадает с $\mathrm{T}(F \oplus \mathbf{Q}^{(q)})$-радикалом группы A, поэтому

$$B \cap \mathbf{t}_q(A) \in \mathcal{T}(F \oplus \mathbf{Q}^{(q)}) \subset \mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(F_q).$$

Радикальный класс $\mathcal{T}(F_q)$ замкнут относительно расширений, так что $B \in \mathcal{T}(F_q)$. Приведённые рассуждения справедливы для любого простого q, и из (15) делаем вывод, что $B \in \mathcal{T}(F)$. Отсюда уже следует равенство $\mathrm{W}_F(A) = B$. $\square$

Лемма 8.5. *Если F — p-группа, то равенство (20) справедливо для всякой группы A.*

Доказательство. Действительно, пусть (19) — какое-то прямое разложение группы F. Мы не исключаем возможности, что некоторые прямые слагаемые в этом разложении равны нулю (в следующей лемме это позволит нам использовать данный результат без дополнительных оговорок). Для произвольного $i \in I$ функция $\psi^i \colon P \to M_2$, соответствующая радикалу W_i, равна ν при любом значении своего аргумента (быть может, кроме значения аргумента, равного p). Следовательно, множество $\{\mathrm{W}_i\}_{i \in I}$ является линейно упорядоченным и содержит не более трёх различных элементов. Пусть W_j — наименьший из этих элементов. Тогда пересечение всех подгрупп $\mathrm{W}_i(A)$ совпадает с $\mathrm{W}_j(A)$ и потому сервантно в A. Отсюда получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 8.6. *Если F — периодическая группа, то равенство (20) справедливо для всякой группы A.*

Доказательство. Разложим все группы F_i на p-компоненты:

$$F_i = \bigoplus_{p \in P} F_{ip}.$$

Очевидно, что в этом случае p-компоненты самой группы F имеют вид $F_p = \bigoplus\limits_{i \in I} F_{ip}$. По леммам 8.4 и 8.5 получаем, что

$$\mathrm{W}_F(A) = \bigcap_{p \in P} \mathrm{W}_p(A) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{p \in P} \mathrm{W}_{ip}(A) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{W}_i(A)$$

(через W_{ip} мы обозначили $\mathrm{T}(F_{ip})$-радикалы). Лемма доказана. □

Результаты последних лемм суммирует

Теорема 8.7. *Пусть A, F — произвольные абелевы группы. Если $F = \bigoplus\limits_{i \in I} F_i$, то $\mathrm{W}_F(A) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{W}_{F_i}(A)$.*

Следствие 8.8. *Если $F = G \oplus H$, то для произвольной группы A справедливо равенство $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(\mathrm{W}_H(A))$. В частности, любые два T-радикала категории абелевых групп коммутируют друг с другом.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться доказанным нами равенством $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(A) \cap \mathrm{W}_H(A)$ и очевидными соотношениями

$$\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_F(\mathrm{W}_F(A)) \subset \mathrm{W}_G(\mathrm{W}_H(A)) \subset \mathrm{W}_G(A) \cap \mathrm{W}_H(A).$$

Перестановочность T-радикалов W_G и W_H вытекает из симметричного равенства $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_H(\mathrm{W}_G(A))$. □

Литература

[1] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: Ин. лит., 1960.

[2] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.

[3] Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.

[4] Кашу А. И. Функторы и кручения в категориях модулей. Кишинёв: Штиинца, 1997.

[5] Крылов П. А., Приходовский М. А. Обобщённые Т-модули и Е-модули // Универсальная алгебра и её приложения: Тр. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти Л. А. Скорнякова (Волгоград, 6–11 сент. 1999 г.). — Волгоград, 2000. — С. 153–169.

[6] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Томск. гос. ун-т, 2002.

[7] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Матем. сборн. — 1953. — Т. 33(75), № 1. — С. 13–26.

[8] Курош А. Г. Радикалы в теории групп // Сиб. матем. ж. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 912–931.

[9] Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969.

[10] Приходовский М. А. Изоморфизмы тензорных произведений модулей и Т-модули. Кандидатская диссертация. Томск, 2002.

[11] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970.

[12] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. 1.

[13] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т. 2.

[14] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.

[15] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.

[16] Amitsur S. A. A general theory of radicals II. Radicals in rings and bicategories // Amer. J. Math. — 1954. — V. 76, no. 1. — P. 100–125.

[17] Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — V. 228, no. 3. — P. 197–214.

[18] Dickson S. E. On torsion classes of Abelian groups // J. Math. Soc. Japan. — 1965. — V. 17, no. 1. — P. 30–35.

[19] Gardner B. J. Torsion classes and pure subgroups // Pacific J. Math. — 1970. — V. 33, no. 1. — P. 109–116.

[20] Gardner B. J. Two notes on radicals of Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1972. — V. 13, no. 3. — P. 419–430.

[21] Gardner B. J. Generalized-pure-hereditary radical classes of Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1973. — V. 14, no. 2. — P. 187–195.

[22] Göbel R., Shelah S. Semi-rigid classes of cotorsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1985. — V. 93, no. 1. — P. 136–150.

[23] Golan J. S. Torsion theories. New York: Longman Sci. Techn., 1986.

[24] Jambor P. On generation of torsion theories // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1972. — V. 13, no. 1. — P. 79–98.

[25] Jambor P. An orthogonal theory of a set-valued bifunctor // Czech. Math. J. — 1973. — V. 23(98), no. 3. — P. 447–454.

[26] Jambor P. Hereditary tensor-orthogonal theories // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1975. — V. 16, no. 1. — P. 139–145.

[27] Lambek J. Torsion theories, additive semantics and rings of quotients // Lect. Notes Math., 177. — Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1971.

[28] Pierce R. S. E-modules // Contemp. Math., 87. Abelian group theory. — Providence: Amer. Math. Soc., 1989. — P. 221–240.

[29] Schelter W., Roberts P. Flat modules and torsion theories // Math. Z. — 1972. — V. 129, no. 4. — P. 331–334.

[30] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. — 1973. — V. 15, no. 1. — P. 60–69.

[31] Stenström B. Rings of quotients. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1975.

Работы автора по теме диссертации

[32] Тимошенко Е. А. E-модули и связанный с ними радикал // Абелевы группы и модули. — Томск, 2000. — Вып. 15. — С. 98–112.

[33] Тимошенко Е. А. T-модули и T-радикал // Материалы XXXIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосибирск, 2001. — С. 3.

[34] Тимошенко Е. А. T-радикалы в категории абелевых групп // Международная конференция «Алгебра и её приложения»: Тезисы докладов. — Красноярск, 2002. — С. 118.

[35] Тимошенко Е. А. T-радикалы в категории модулей // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докладов V Международной конференции (Тула, 19–24 мая 2003 г.). — Тула, 2003. — С. 214–215.

[36] Timoshenko E. A. T-radicals in the category of modules // International Conference on Radicals. Program and abstracts. — Kishinev, 2003. — P. 33–35.

[37] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории модулей // Международная конференция по математике и механике: Тезисы докладов. — Томск, 2003. — С. 59.

[38] Тимошенко Е. А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. матем. ж. — 2004. — Т. 45, № 1. — С. 201–210.

[39] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории абелевых групп // Алгебра, логика и кибернетика: Материалы Международной конференции. — Иркутск, 2004. — С. 107–108.

[40] Timoshenko E. A. T-radicals in the category of modules // Acta Appl. Math. — 2005. — V. 85, no. 1–3. — P. 297–303.

[41] Тимошенко Е. А. Т-радикалы в категории абелевых групп // Материалы XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. — Новосибирск, 2005. — С. 14.

[42] Тимошенко Е. А. Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп // Абелевы группы: Труды Всероссийского симпозиума (Бийск, 22–25 авг. 2005 г.). — Бийск, 2005. — С. 37–39.