ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНЫЙ РАНГ ФАКТОРНО ДЕЛИМОЙ ГРУППЫ

А. В. ЦАРЕВ

Рязанский государственный педагогический университет

УДК 512.541

Ключевые слова: кольцо псевдорациональных чисел, псевдорациональный ранг, факторно делимая смешанная группа.

Аннотация

В данной работе изучаются факторно делимые смешанные группы. Для них рассматривается введенный А.А. Фоминым новый инвариант – псевдорациональный ранг.

Введение

В работе [5] А.А. Фомин и W. Wickless ввели понятие смешанной факторно делимой группы и построили категорию $\mathcal{QD}$, объектами которой являются эти группы, а морфизмами – квазигомоморфизмы, там же они доказали, что категория $\mathcal{QD}$ двойственна категории $\mathcal{QTF}$ – абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. Отметим, что группы из категории $\mathcal{QD}$ привлекли к себе внимание довольно давно. Так, например, факторно делимые группы без кручения это в точности классические факторно делимые группы, которые в 1961 году рассмотрели R. Beaumount и R. Pierce в [2], а S. Glaz и W. Wickless в [3] построили класс $\mathcal{G}$, состоящий из смешанных факторно делимых групп.

Для групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп А.А. Фомин в [6] ввел понятие псевдорационального типа и псевдорационального ранга. В [7] и [8] содержется ряд результатов для групп без кручения, относительно введенных Фоминым понятий. Здесь же эти понятия рассматриваются для факторно делимых групп.

Под группой в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно; Z, Q и $\widehat{Z}_p$ – обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно, P – множество всех простых чисел. Если S – подмножество группы G, то $\langle S \rangle$ – подгруппа, порожденная множеством S, а $\langle S \rangle_*$ – сервантная оболочка S в G, состоящая из всех таких элементов $x \in G$, что $nx \in \langle S \rangle$, для некоторого натурального n. Через $r(G)$ будем обозначать ранг без кручения группы G, через $r^*(G)$ и $r^*(M)$ – псевдорациональный ранг группы G и R-модуля M соответственно. Подгруппа F называется полной в группе

G, если G/F – периодическая группа. Через $t(G)$ и $\hat{G}$ будем обозначать периодическую часть и Z-адическое пополнение группы G соответственно. Знак ■ показывает конец доказательства. Определения других используемых понятий и обозначений можно найти в [1].

1 Модули над кольцом псевдорациональных чисел

Рассмотрим подкольцо в кольце $J = \prod_{p\in P} \widehat{Z}_p$, порожденное идеалом $\bigoplus_{p\in P} \widehat{Z}_p$ и единицей кольца.

Определение 1 [4] *Кольцо* $R = \left\langle 1, \bigoplus_{p\in P} \widehat{Z}_p \right\rangle_*$ *называется кольцом псевдорациональных чисел.*

Рассмотрим также конструкции ряда других колец, приведенные в работе [4]. Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика, $K_p = Z/p^{m_p}Z$ или $K_p = \widehat{Z}_p$, при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$ соответственно. Если χ содержит бесконечно много ненулевых элементов, то рассмотрим подкольцо $R_\chi = \left\langle 1, \bigoplus_{p\in P} K_p \right\rangle_*$ кольца $\prod_{p\in P} K_p$. Если все p-компоненты χ, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то рассмотрим кольца $K_\chi = K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$ и $R_\chi = Q \oplus K_\chi$. Заметим, что если $\chi = (\infty)$, то кольцо R_χ есть в точности кольцо псевдорациональных чисел.

Следующие свойства кольца псевдорациональных чисел более или менее очевидны.

Свойства.

1) Элемент $r = (\alpha_p) \in \prod_{p\in P} \widehat{Z}_p$ *принадлежит кольцу R тогда и только тогда, когда для него найдется рациональное число $|r| = m/n$ такое, что $n\alpha_p = m$, почти при всех простых p.*

2) Элементы вида $\varepsilon_p = (0, \dots, 0, 1_p, 0, \dots)$ являются идемпотентами кольца R. Более того, любой идемпотент кольца R имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}$ или $1 \Leftrightarrow \varepsilon$.

3) $T = \bigoplus_{p\in P} \widehat{Z}_p$ *является идеалом кольца R и состоит из всех таких $r \in R$, что $|r| = 0$.*

Всюду далее, для произвольного псевдорационального числа r через $|r|$ будем обозначать рациональное число, определенное в свойстве 1, а через T будем обозначать идеал кольца R, определенный в свойстве 3.

Далее мы рассмотрим некоторые инварианты и свойства модулей над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 2 [4] *R-модуль M называется делимым, если его аддитивная группа делимая без кручения (при этом $rm = |r|m$). Если R-модуль не содержит делимых подмодулей, то он называется редуцированным.*

Теорема 1 [4] *Для произвольного R-модуля M справедливо:*

1. Модуль M либо редуцированный, либо содержит наибольший делимый подмодуль $divM$;

2. $divM = \{m \in M \mid tm = 0$ для любого $t \in T\}$;

3. $divM$ выделяется прямым слагаемым в M. ■

Пусть M – произвольный конечно порожденный R-модуль с системой образующих $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда, очевидно, что $\widehat{Z}_p$-модуль $M_p = \varepsilon_p M$ порождается элементами $\{\varepsilon_p x_1, \ldots, \varepsilon_p x_n\}$. Конечно порожденный p-адический модуль M_p представим в виде прямой суммы циклических $\widehat{Z}_p$-модулей:

$$M_p = \langle a_1 \rangle_{\widehat{Z}_p} \oplus \cdots \oplus \langle a_n \rangle_{\widehat{Z}_p},$$

где некоторые слагаемые могут быть нулевыми.

Циклический $\widehat{Z}_p$-модуль изоморфен или $Z/p^{k_{ip}}Z$, где k_{ip} – целое неотрицательное число, или $\widehat{Z}_p$. Следовательно, изоморфизм

$$M_p \cong Z(p^{k_{1p}}) \oplus \cdots \oplus Z(p^{k_{tp}}) \oplus \bigoplus_s \widehat{Z}_p, \ t + s = n$$

определяет следующую упордоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞

$$0 \le k_{np} \le \cdots \le k_{np} \le \infty, \tag{1}$$

где последние s членов есть символы ∞ $(0 \le s \le n)$. Последовательность (1) по всем простым p определяет последовательность характеристик. Несколько первых характеристик могут быть нулевыми, если их отбросить, то получим последовательность

$$\chi_1 \le \cdots \le \chi_k. \tag{2}$$

Множество характеристик (2) будем называть *приведенным типом Ричмана* или просто *типом Ричмана* конечно порожденного R-модуля M. *Заметим, что в отличии от групп без кручения, тип Ричмана R-модуля состоит из характеристик, а не из типов.*

Определение 3 [4] *Псевдорациональным рангом R-модуля M называется $\dim_Q(M/TM)$ — размерность фактормодуля M/TM, рассматриваемого в качестве векторного пространства над полем $Q \cong R/T$.*

Свойства.

4) Если M – произвольный R-модуль, то множество

$$TM = \{tm \mid t \in T, m \in M\}$$

является подмодулем модуля M, причем $TM = \bigoplus_{p\in P} M_p$, где $M_p = \varepsilon_p M$.

5) Если N – подмодуль R-модуля M, то $r^*(M) = r^*(M/N) + r^*(N)$.

Так как $T(M/N) = TM/TN$ и $(M/N)/(TM/TN) \cong (M/TM)/(N/TN)$, то

$$r^*(M) = dim_Q((M/N)/(TM/TN)) + dim_Q(N/TN) = r^*(M/N) + r^*(N).$$

6) Если M – R-модуль локально свободного типа Ричмана (в типе Ричмана нет символов ∞), то $r^*(M) = r(M)$.

Если M – R-модуль локально свободного типа Ричмана, то $TM = t(M)$, следовательно, $r^*(M) = r(M/t(M)) = r(M)$.

2 Факторно делимые группы

Определение 4 [5] *Группа G называется факторно делимой, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга F, что G/F – периодическая делимая группа.*

Линейно независимую систему элементов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, порождающую группу F из определения 4, будем называть *фундаментальной системой* факторно делимой группы G, а саму группу F – ее *фундаментальной подгруппой.*

Пусть G – редуцированная факторно делимая смешанная группа. Рассмотрим ее Z-адическое пополнение $\hat{G}$. Канонический гомоморфизм $\alpha : G \to \hat{G}$ является мономорфизмом, так как $\ker\alpha = \bigcap_{n\in N} nG = G^1 = 0$. Группа $\hat{G}$ является $\widehat{Z}$-модулем, а значит, и модулем над кольцом псевдорациональных чисел.

Определение 5 [6] *R-модуль $\mathcal{R}(G) = divG \oplus \langle\alpha(G)\rangle_R$, называется псевдорациональным типом факторно делимой группы G.*

Очевидно, что существует естественное вложение $\varphi : G \to \mathcal{R}(G)$, поэтому везде далее будем отождествлять G с $\varphi(G)$.

Лемма 1 [6] *Пусть $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$ – такая свободная подгруппа факторно делимой группы G, что G/F – периодическая делимая группа, тогда*

$$\mathcal{R}(G) = \langle F\rangle_R = \langle x_1, \dots, x_n\rangle_R.$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что любой элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in R$.

Так как G/F – периодическая группа, то $mg = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n$, при некоторых $m, m_1, \ldots, m_n \in Z$ и $m \neq 0$. Тогда

$$mg = (1 \Leftrightarrow \varepsilon)(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n) + \varepsilon(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n),$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \cdots + \varepsilon_{p_s}$ и $p_1, \ldots, p_s$ – все простые делители m. Так как идемпотент $(1 \Leftrightarrow \varepsilon)$ делится на m, то

$$m(g \Leftrightarrow \frac{1 \Leftrightarrow \varepsilon}{m}(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n)) \in \varepsilon\mathcal{R}(G) = \varepsilon_{p_1}\mathcal{R}(G) \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{p_s}\mathcal{R}(G).$$

$\widehat{Z}_p$-модуль $\varepsilon_p\mathcal{R}(G)$ совпадает с p-адическим пополнением $\hat{G}_p$, следовательно,

$$g \Leftrightarrow \frac{1 \Leftrightarrow \varepsilon}{m}(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n) \in \hat{G}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \hat{G}_{p_s}.$$

Но эти подмодули R-модуля $\mathcal{R}(G)$ порождаются элементами $\varepsilon_{p_j}x_i$, $j = 1, \ldots, s$; $i \in \{1, \ldots, n\}$, значит,

$$g \Leftrightarrow \frac{1 \Leftrightarrow \varepsilon}{m}(m_1x_1 + \cdots + m_nx_n) = \varepsilon s_1x_1 + \cdots + \varepsilon s_nx_n,$$

где $s_1, \ldots, s_n \in R$. Таким образом, $g = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$, где $r_1, \ldots, r_n \in R$. ■

Следствие 1 *Псевдорациональный тип факторно делимой группы является конечно порожденным R-модулем.* ■

Рассмотрим простейшие свойства псевдорационального типа, которые будут в дальнейшем использоваться.

Теорема 2 *Пусть G и H – факторно делимые группы, тогда:*

1. *Если $H \subseteq G$, то $\mathcal{R}(H) \subseteq \mathcal{R}(G)$;*

2. *$t(G) = t(\mathcal{R}(G))$;*

3. *$\mathcal{R}(nG) = n\mathcal{R}(G)$ при любом $n \in N$.*

Доказательство. 1. Так как $H \subseteq G$ и $\mathcal{R}(G) = divG \;\oplus \langle G/divG \rangle_R$, то любой элемент из $\mathcal{R}(H)$ содержится в $\mathcal{R}(G)$.

2. Так как $G \subseteq \mathcal{R}(G)$, то $t(G) \subseteq t(\mathcal{R}(G))$. С другой стороны $t(\mathcal{R}(G)) \subseteq t(\hat{G}) = t(G)$, следовательно, $t(\mathcal{R}(G)) = t(G)$.

3. Из леммы 1 следует, что $\mathcal{R}(nG) = \langle nF \rangle_R = n\langle F \rangle_R = n\mathcal{R}(G)$. ■

Возьмем произвольный элемент g из факторно делимой группы G. Для каждого простого p число k будем называть *p-порядком* элемента g, если p^k – порядок элемента $\varepsilon_p g \in \mathcal{R}(G)$ (p-порядок элемента g будем обозначать $o_p(g)$). При этом, если $\varepsilon_p g = 0$, то будем считать, что $o_p(g) = 0$. Последовательность p-порядков

$$\chi(g) = (o_{p_1}(g), \ldots, o_{p_n}(g), \ldots)$$

будем называть *характеристикой элемента* g.

Теорема 3 *Пусть G – произвольная факторно делимая группа, тогда:*

1. *Для любого $g \in G$ и $n \in N$ характеристики $\chi(g)$ и $\chi(ng)$ принадлежат одному типу;*

2. *Пусть $g \in G$ и $\langle g \rangle_R \cong R_\chi$, тогда $\chi(g) = \chi$;*

3. *Если $\varphi : G \to H$ и $g \in G$, то $\chi(\varphi(g)) \leq \chi(g)$.*

Доказательство. 1. Если Нод$(p_i, n) = 1$, то $o(\varepsilon_{p_i} g) = o(\varepsilon_{p_i} ng)$, а если $o(\varepsilon_{p_i} g) = \infty$, то и $o(\varepsilon_{p_i} ng) = \infty$. Из этого следует, что характеристики $\chi(g)$ и $\chi(ng)$ могут отличаться лишь конечным множеством конечных элементов.

2. Если $o(\varepsilon_p g) = \infty$, то $\langle \varepsilon_p g \rangle_R \cong \widehat{Z}_p$, а если $o(\varepsilon_p g) = p^k$, то $\langle \varepsilon_p g \rangle_R \cong Z(p^k)$. Тогда $\chi_p = \chi_p(g)$ при любом простом p, т.е. $\chi = \chi(g)$.

3. Так как $o_p(\varphi(g)) \leq o_p(g)$ при любом простом p, то $\chi(\varphi(g)) \leq \chi(g)$. ■

3 Псевдорациональный ранг

Для произвольной факторно делимой группы G определим ее псевдорациональный ранг как псевдорациональный ранг ее псевдорационального типа, т.е.

$$r^*(G) = r^*(\mathcal{R}(G)).$$

Теорема 4 *Факторно делимая группа имеет псевдорациональный ранг* 0 *тогда и только тогда, когда она редуцированная и ее тип Ричмана состоит из почти нулевых характеристик.*

Доказательство. Пусть факторно делимая группа G имеет псевдорациональный ранг 0. Так как $\mathcal{R}(G)$ – конечно порожденный R-модуль, то найдется такое $\varepsilon \in R$, что $\varepsilon\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G)$. Отсюда следует, что группа G редуцированная и $\varepsilon_p\mathcal{R}(G) = 0$ почти при всех простых p, т.е. тип Ричмана группы G состоит из почти нулевых характеристик.

Если G – редуцированная факторно делимая группа, тип Ричмана которой состоит из почти нулевых характеристик, то $\varepsilon\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(G)$, следовательно, $r^*(\mathcal{R}(G)) = r^*(G) = 0$. ■

Пусть G – произвольная факторно делимая смешанная группа, $M = \mathcal{R}(G)$ – псевдорациональный тип группы G и $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – произвольная конечная система элементов из G. Будем считать, что $G \subseteq M$. Тогда рассмотрим два множества:

$$\nabla G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in G\},$$

$$\Delta G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0\}.$$

Очевидно, что ∇G_X является группой по сложению, а ΔG_X является R-модулем. В случаи, если X – фундаментальная система в G, модуль ΔG_X будем называть *модулем псевдорациональных отношений* группы G.

Теорема 5 *Пусть G – произвольная факторно делимая группа, множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является фундаментальной системой группы G, тогда $G \cong \nabla G_X / \Delta G_X$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : \nabla G_X \to G$, по закону $\varphi((r_1, \ldots, r_n)) = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$. Из леммы 1 и определения группы ∇G_X следует, что φ – сюръективное отображение. Так как

$$\varphi((r_1, \ldots, r_n)+(s_1, \ldots, s_n)) = \varphi((r_1+s_1, \ldots, r_n+s_n)) = (r_1+s_1)x_1+\cdots+(r_n+s_n)x_n =$$

$$= (r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) + (s_1x_1 + \cdots + s_nx_n) = \varphi((r_1, \ldots, r_n)) + \varphi((s_1, \ldots, s_n)),$$

то φ – эпиморфизм, причем $\ker \varphi = \Delta G_X$. Таким образом, $G \cong \nabla G_X / \Delta G_X$. ■

Теорема 6 *Пусть G – произвольная факторно делимая группа, система $X = \{x_1, \ldots x_n\} \subset G$ такая, что $\mathcal{R}(G) = \langle X \rangle_R$, тогда*

$$n = r^*(G) + r^*(\Delta G_X).$$

Доказательство. Построим отображение $\varphi : R^n \to \mathcal{R}(G)$, по закону

$$\varphi((r_1, \ldots, r_n)) = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n.$$

Данное отображение, очевидно, является эпиморфизмом, причем

$$\ker \varphi = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0\} = \Delta G_X.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{R}(G) \cong R^n / \Delta G_X$, а значит,

$$r^*(R^n) = n = r^*(\mathcal{R}(G)) + r^*(\Delta G_X) = r^*(G) + r^*(\Delta G_X). \blacksquare$$

Следствие 2 *Если G – произвольная факторно делимая группа, ΔG_X – ее модуль псевдорациональных отношений, то*

$$r^*(G) = r(G) \Leftrightarrow r^*(\Delta G_X).$$

4 Группа $Hom(G, R)$

Для начала построим для произвольной факторно делимой группы G еще один R-модуль. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – фундаментальная система группы G, ΔG_X – модуль псевдорациональных отношений, построенный на этой системе. Рассмотрим модуль

$$\Lambda G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid \Delta G_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0\}.$$

Теорема 7 [6] *Если M – редуцированный R-модуль, или L – делимый R-модуль, то $Hom_Z(L, M) = Hom_R(L, M)$.*

Доказательство. Пусть M – редуцированный. Для любого простого p группа $(1 \Leftrightarrow \varepsilon_p)L$ является p-делимой, а группа $\varepsilon_p L$ является q-делимой для каждого простого $q \neq p$. Если $f \in Hom(L, M)$, то $f((1 \Leftrightarrow \varepsilon_p))L \subseteq (1 \Leftrightarrow \varepsilon_p))M$ и $f(\varepsilon_p L) \subseteq \varepsilon_p M \oplus divM$. Так как M – редуцированный R-модуль, то $divM = 0$ и $f(\varepsilon_p L) \subseteq \varepsilon_p M$, следовательно, $f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(\varepsilon_p x)$ и

$$0 = \varepsilon_p f(1 \Leftrightarrow \varepsilon_p)x) = \varepsilon_p f(x) \Leftrightarrow \varepsilon_p f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(x) \Leftrightarrow f(\varepsilon_p x).$$

Отсюда следует, что $f(\varepsilon_p x) = \varepsilon_p f(x)$ для любого $x \in L$. Так как $\varepsilon_p L$ и $\varepsilon_p M$ полны в p-адической топологии, то гомоморфизм $f : \varepsilon_p L \to \varepsilon_p M$ является $\widehat{Z}_p$-гомоморфизмом. Тогда $f(r\varepsilon_p x) = r\varepsilon_p f(x)$ для всех $r \in R$ и $x \in L$, и следовательно, $f \in Hom_R(L, M)$.

Пусть L – делимый модуль. Тогда $f(L) \subseteq divM$ и

$$f(rx) = f(|r|x) = |r|f(x) = rf(x)$$

для всех $r \in R$ и $x \in L$. ■

Лемма 2 *Пусть G и H – некоторые факторно делимые смешанные группы, причем H – редуцированная группа, или G – делимая, $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$ – фундаментальная подгруппа группы G, $\varphi : G \to H$ – произвольный гомоморфизм, тогда, если*

$$g = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n \in G,\ r_1, \ldots, r_n \in R,$$

то $\varphi(g) = r_1\varphi(x_1) + \cdots + r_n\varphi(x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1-ый случай. G и H – редуцированные группы. Пусть $\hat{G}$ и $\hat{H}$ – Z-адические пополнения групп G и H, тогда существует единственный гомоморфизм φ^* такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G & \overset{\varphi}{\Leftrightarrow} & H \\ \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ \hat{G} & \overset{\varphi^*}{\Leftrightarrow} & \hat{H}. \end{array}$$

Здесь отображения μ и ν являются мономорфизмами, поэтому можно считать, что $G \subset \hat{G}$ и $H \subset \hat{H}$. Так как $\hat{G}$ и $\hat{H}$ – редуцированные R-модули, то, применив теорему 7, получим:

$$\varphi(g) = \varphi(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = \varphi^*(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) =$$

$$= r_1 \varphi^*(x_1) + \cdots + r_n \varphi^*(x_n) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_n \varphi(x_n).$$

2-ой случай. G и H – делимые группы без кручения, тогда они являются делимыми R-модулями, и следовательно, по теореме 7

$$\varphi(g) = \varphi(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_n \varphi(x_n).$$

3-ий случай. G – делимая группа и $H = D \oplus H_1$, где D – делимая группа без кручения, а H_1 – редуцированная группа. Так как $Hom(G, H) = Hom(G, D)$, то данный случай сводится к случаю 2.

4-ый случай. H – редуцированная группа и $G = D \oplus G_1$, где D – делимая группа без кручения, а G_1 – редуцированная. Так как $Hom(G, H) = Hom(G_1, H)$, то данный случай сводится к случаю 1. ■

Отметим, что лемма 2 остается справедливой, если H – произвольная группа с нулевой ульмовской подгруппой (например, если $H = R$ – аддитивная группа кольца псевдорациональных чисел).

Теорема 8 *Пусть G – произвольная факторно делимая группа. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – ее фундаментальная система, то гомоморфизм $\varphi : G \to R$, такой, что $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$ существует тогда и только тогда, когда $(r_1, \ldots, r_n) \in \Lambda G_X$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in Hom(G, R)$ и $(s_1, \ldots, s_n)$ – произвольный элемент из ΔG_X. Тогда $s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n = 0$, и значит, $\varphi(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) = 0$. Но из выше доказанного следует, что $\varphi(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n) = s_1 \varphi(x_1) + \cdots + s_n \varphi(x_n)$, значит, для любого $(s_1, \ldots, s_n) \in \Delta G_X$ справедливо: $s_1 \varphi(x_1) + \cdots + s_n \varphi(x_n) = 0$, т.е. $(\varphi(x_1), \ldots, (\varphi(x_n)) \in \Lambda G_X$.

Проверим обратное утверждение. Пусть $(r_1, \ldots, r_n)$ – произвольный элемент модуля ΛG_X, докажем существование такого гомоморфизма $\varphi \in Hom(G, R)$, что $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Пусть g – произвольный элемент группы G, так как G сервантно вкладывается в аддитивную группу R-модул $\langle X \rangle_R$, то $g = s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n$, где $s_1, \ldots, s_n \in R$. Рассмотрим соответствие между элементами группы G и кольца псевдорациональных чисел по закону:

$$\varphi(g) = s_1 r_1 + \cdots + s_n r_n.$$

Покажем, что φ – отображение. Пусть $g = s'_1 x_1 + \cdots + s'_n x_n$, где $s'_1, \ldots, s'_n \in R$, – другое представление элемента g. Тогда

$$(s_1 \Leftrightarrow s'_1) x_1 + \cdots + (s_n \Leftrightarrow s'_n) x_n = 0, \quad \text{т.е.} \quad ((s_1 \Leftrightarrow s'_1), \ldots, (s_n \Leftrightarrow s'_n)) \in \Delta G_X.$$

Так как $(r_1, \dots, r_n) \in \Lambda G_X$, то $(s_1 \Leftrightarrow s'_1)r_1 + \dots + (s_n \Leftrightarrow s'_n)r_n = 0$, значит,

$$\varphi(s_1x_1 + \dots + s_nx_n) = \varphi(s'_1x_1 + \dots + s'_nx_n),$$

т.е. φ – отображение.

Пусть $g_1,\ g_2 \in G$ и $g_1 = s_1x_1 + \dots + s_nx_n$, $g_2 = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ – произвольные представления элементов $g_1,\ g_2$ в R-модуле $\langle X \rangle_R$, тогда

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi((s_1 + t_1)x_1 + \dots + (s_n + t_n)x_n) = (s_1 + t_1)r_1 + \dots + (s_n + t_n)r_n =$$

$$= (s_1r_1 + \dots + s_nr_n) + (t_1r_1 + \dots + t_nr_n) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2).$$

Таким образом, φ – гомоморфизм, причем $\varphi(x_i) = r_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$. ■

Следствие 3 *Если G – произвольная факторно делимая группа, то*

$$Hom(G, R) \cong \Lambda G_X. \ ■$$

Теорема 9 *Если G – произвольная факторно делимая группа, то*

$$r^*(G) \geq r^*(Hom(G, R)).$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – фундаментальная система группы G. Рассмотрим R-модуль

$$\Lambda^* G_X = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n \mid \Delta G_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix} \subseteq T\}.$$

Векторное пространство $\Lambda^* G_X / T\Lambda^* G_X$ является ортогональным дополнением к пространству $\Delta G_X / T\Delta G_X$, следовательно,

$$r^*(\Lambda^* G_X) + r^*(\Delta G_X) = r(G).$$

Тогда, учитывая следствие 3 и то, что $\Lambda G_X \subseteq \Lambda^* G_X$, получаем

$$r^*(Hom(G, R)) \leq r^*(\Lambda^* G_X) = r(G) \Leftrightarrow r^*(\Delta G_X) = r^*(G). \ ■$$

Отметим также следующее утверждение.

Теорема 10 *Если G – группа конечного ранга (не обязательно факторно делимая), то*

$$T \cdot Hom(G, R) = Hom(G, T).$$

Доказательство. Так как $T \cdot Hom(G, R) \subseteq Hom(G, T)$, то достаточно показать, что любой гомоморфизм φ из G в T лежит в $T \cdot Hom(G, R)$.

Пусть $\varphi \in Hom(G, T)$, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$ – полная свободная подгруппа в G. Тогда существует такое $\varepsilon \in R$, что $\varphi(F) \subseteq \varepsilon R$. Если g – произвольный элемент из G, то $mg \in F$ при некотором натуральном m, следовательно, $\varphi(mg) = m\varphi(g) \in \varepsilon R$, а значит, $\varphi(g) \in \varepsilon R$. Таким образом, $\varphi(G) \subseteq \varepsilon R$ и $\varphi \in T \cdot Hom(G, R)$. ■

5 Радикал факторно делимой группы

Рассмотрим еще одну важную подгруппу в факторно делимой группе. *Радикалом* факторно делимой группы G будем называть группу

$$G[0] = \bigcap_{\varphi : G \to R} \ker \varphi.$$

Теорема 11 *Пусть G – произвольная факторно делимая группа, тогда:*

1. *$G[0] = \{g \in G \mid \chi(g)$ не содержит символов $\infty\}$;*
2. *$\langle G[0] \rangle_R = G[0]$;*
3. *$G/G[0]$ является факторно делимой группой без кручения;*
4. *$r^*(G/t(G)) = r^*(G/G[0]) + r^*(G[0])$.*

Доказательство. 1. Пусть $H = \{g \in G \mid \chi(g)$ не содержит символов $\infty\}$ и $\varphi \in Hom(G, R)$. Если $g \in H$, то $\chi(\varphi(g)) < \chi(g)$, в частности $\chi(\varphi(g))$ не содержит символов ∞. Но $\varphi(g) \in R$, следовательно, $\varphi(g) = 0$, т.е. $H \subseteq G[0]$.

Пусть $g \in G[0]$. Если $o_p(g) = \infty$ при некотором простом p, то $\varepsilon_p \mathcal{R}(G)$ содержит прямые слагаемые вида $\widehat{Z}_p$. Поскольку $\varepsilon_p \mathcal{R}(G)$ – конечно порожденный $\widehat{Z}_p$-модуль, то существует такой гомоморфизм $\varphi_p : \varepsilon_p \mathcal{R}(G) \to \widehat{Z}_p$, что $\varepsilon_p g \notin \ker \varphi_p$. Так как $\varepsilon_p \mathcal{R}(G)$ – прямое слагаемое в $\mathcal{R}(G)$, а $\widehat{Z}_p$ – прямое слагаемое в R, то существует гомоморфизм $\varphi : \mathcal{R}(G) \to R$, такой, что $g \notin \ker \varphi$. Пусть ψ – ограничение гомоморфизма φ на группу G. Тогда $\psi \in Hom(G, R)$ и $\psi(g) = \varphi(g) \neq 0$, т.е. $g \notin G[0]$. Получили противоречие, значит, $\chi(g)$ не содержит символов ∞ и $G[0] \subseteq H$, т.е. $G[0] = H$.

2. Пусть $g \in G[0]$, $r \in R$. Убедимся, что $rg \in G[0]$. Из свойств псевдорациональных чисел следует, что $r = (1 \Leftrightarrow \varepsilon)\frac{m}{n} + \varepsilon r$. Тогда

$$n(rg) = (1 \Leftrightarrow \varepsilon)mg + n(\varepsilon rg).$$

Так как $\chi(g) < \infty$, то $\varepsilon_p g \in t(G)$ при любом p, следовательно, $n(\varepsilon rg) \in t(G)$ и $(1 \Leftrightarrow \varepsilon)mg = mg \Leftrightarrow \varepsilon mg \in G$. Таким образом, $n(rg) \in G$, а значит, в силу строения группы G, $rg \in G$. Учитывая, что $\chi(rg) \leq \chi(g) < \infty$, получаем, что $rg \in G[0]$.

3. Из свойства 2 следует, что $G[0]$ – R-модуль, причем $TG[0] = t(G[0]) = t(G)$. Тогда из свойств R-модулей следует, что $G[0]/t(G) = G[0]/TG[0]$ – векторное постранство над полем Q, т.е. $G[0]/t(G)$ – делимая группа без кручения.

В [6] доказано, что $G/t(G)$ – факторно делимая группа без кручения. Так как $G[0]/t(G)$ – делимая подгруппа $G/t(G)$ и $G/G[0] \cong (G/t(G))/(G[0]/t(G))$, то $G/G[0]$ – факторно делимая группа без кручения.

4. Так как $G[0]/t(G)$ – делимая группа, то $G/t(G) \cong G[0]/t(G) \oplus G/G[0]$, следовательно, $r^*(G/t(G)) = r^*(G[0]) + r^*(G/G[0])$. ■

Теорема 12 *Если G – произвольная факторно делимая группа, то*

$$r^*(Hom(G,R)) \leq r^*(G) \Leftrightarrow r^*(G[0]).$$

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – фундаментальная система группы G. Рассмотрим R-модуль

$$\nabla G[0] = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n \in G[0]\}.$$

Условие $r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n \in G[0]$ равносильно тому, что

$$\varphi(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n) = r_1(\varphi(x_1)) + \cdots + r_n(\varphi(x_n)) = 0$$

при любом $\varphi \in Hom(G,R)$, а значит,

$$(r_1, \ldots, r_n) \in \nabla G[0] \Leftrightarrow \Lambda G_X \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Как и в доказательстве теоремы 9 из (1) получаем

$$r^*(\nabla G[0]) \leq r(G) \Leftrightarrow r^*(Hom(G,R)). \tag{2}$$

С другой стороны $G[0] \cong \nabla G[0]/\Delta G_X$, следовательно,

$$r^*(\nabla G[0]) = r^*(G[0]) + r^*(\Delta G_X) = r^*(G[0]) + r(G) \Leftrightarrow r^*(G). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем

$$r^*(Hom(G,R)) \leq r^*(G) \Leftrightarrow r^*(G[0]). \blacksquare$$

Лемма 3 *Радикал $G[0]$ является сервантной подгруппой группы G.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $nx = g$, где $g \in G[0]$. Пусть x_0 – его решение в группе G, тогда

$$\varphi(g) = \varphi(nx_0) = n\varphi(x_0) = 0$$

при любом $\varphi \in Hom(G,R)$. Но в R нет элементов конечного порядка, значит, из равенства $n\varphi(x_0) = 0$ следует, что $\varphi(x_0) = 0$ при любом $\varphi \in Hom(G,R)$, т.е. $x_0 \in G[0]$. $\blacksquare$

Теорема 13 *Если G – факторно делимая смешанная группа, то*

1. *$Hom(G,R) = 0 \Leftrightarrow G$ имеет локально свободный тип Ричмана;*
2. *$Hom(G,R) \cong R^{r(G)} \Leftrightarrow G$ – свободная группа;*

3. $Hom(G,R) \not\cong T^{r(G)}$ *для любой факторно делимой группы* G*.*

Доказательство. 1. Условие равенства нулю группы $Hom(G,R)$ равносильно тому, что $G = G[0]$, а последнее означает, что G имеет локально свободный тип Ричмана.

2. Для факторно делимой смешанной группы G имеет место изоморфизм

$$Hom(G,R) \cong Hom(G/G[0],R),$$

где $G/G[0]$ – факторно делимая группа без кручения конечного ранга. Используя результаты, полученные в [8], не трудно доказать, что для группы без кручения $G/G[0]$ условие $Hom(G/G[0],R) \cong R^{r(G)}$ равносильно тому, что $G/G[0]$ – свободная группа без кручения ранга $r(G)$. Так как $G[0]$ – сервантная подгруппа группы G, то по известной теореме Куликова (см. [1] теорема 28.2), из свободы группы $G/G[0]$ следует, что $G[0]$ – прямое слагаемое группы G, т.е.

$$G = G[0] \oplus F,$$

где F – свободная группа ранга $r(G)$, поскольку $F \cong G/G[0]$. Из прямого разложения следует, что $r(G[0]) = r(G) \Leftrightarrow r(F) = 0$, а значит, $G[0] = t(G)$ – периодическая группа. Но группа $t(G) \oplus F$ является факторно делимой тогда и только тогда, когда $t(G) = 0$. Таким образом, из $Hom(G,R) \cong R^{r(G)}$ следует, что G – свободная группа. Обратное утверждение очевидно.

3. Если $Hom(G,R) \cong T^{r(G)}$ для факторно делимой группы G, то

$$Hom(G/G[0],R) \cong T^{r(G)}$$

для группы без кручения $G/G[0]$ конечного ранга. Но как показано в [8] последнее равносильно тому, что $G/G[0]$ – коредуцированная локально свободная группа, что невозможно, так как $G/G[0]$ – факторно делимая группа.

Литература

[1] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы, Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.

[2] R. Beaumont and R. Pierce, Torsion free rings, Ill. J. Math. 5, 1961, 61–98

[3] S. Glaz and W. Wickless, Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups, Comm. in Algebra 22, 1994, 1553–1565.

[4] A. A. Фомин, Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers, in the book: Proceedings of the Dublin's Conference on Abelian Groups, 1999, 87–100.

[5] A. A. Fomin and W. Wickless, Quotient divisible abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. 126, 1998, 45–52.

[6] A. A. Fomin, Quotient divisible mixed groups, Contempt. Math. 273, 2001, 117–128.

[7] А. В. Царев, Модуль псевдо-рациональных отношений группы, Чебышевский сборник, т. 3, вып 1, Тула, 2002, 120–134.

[8] А.В. Царев, Псевдорациональный ранг абелевой группы, Сиб. матем. ж., 2005, т.46, 1, 217–229.