УДК 512.441

ПСЕВДО-РАЦИОНАЛЬНЫЙ РАНГ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

А.В. Царев

Ключевые слова: кольцо псевдо-рациональных чисел, псевдо-рациональный ранг, факторно делимая смешанная группа.

Аннотация

В данной работе изучаются абелевы группы без кручения конечного ранга и факторно делимые смешанные группы. Для групп без кручения конечного ранга рассматривается введенный А.А. Фоминым новый инвариант – псевдо-рациональный ранг и находится его связь с обычным рангом. Для факторно делимых смешанных групп найдено условие существования гомоморфизма из одной группы в другую.

Введение

Под группой в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно; Z, Q и $\widehat{Z}_p$ – обозначения колец целых, рациональных и целых p-адических чисел соответственно, P – множество всех простых чисел. Если S – подмножество группы G, то $\left\langle S\right\rangle$ – подгруппа, порожденная множеством S, а $\left\langle S\right\rangle_*$ – сервантная оболочка S в G, состоящая из всех таких элементов $x \in G$, что $nx \in \left\langle S\right\rangle$, для некоторого натурального n. Через $r(G)$ и $r_p(G)$ будем обозначать соответственно ранг без кручения и p-ранг группы G, через $r^*(G)$ и $r^*(M)$ – псевдо-рациональный ранг группы G и R-модуля M соответственно. Подгруппа F называется полной в группе без кручения G если G/F – периодическая группа. Знак ■ показывает конец доказательства. Определения других используемых понятий и обозначений можно найти в [1].

1 Модули над кольцом псевдо-рациональных чисел

Рассмотрим сервантное подкольцо R в $\prod\limits_{p\in P}\widehat{Z}_p$, порожденное идеалом $\bigoplus\limits_{p\in P}\widehat{Z}_p$ и единицей кольца.

Определение 1. ([2]) *Кольцо* $R = \left\langle 1, \bigoplus\limits_{p\in P}\widehat{Z}_p\right\rangle_*$ *называется кольцом псевдо-рациональных чисел.*

Рассмотрим также конструкции ряда других колец, приведенные в работе [2]. Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика, $K_p = Z/p^{m_p}Z$ или $K_p = \widehat{Z}_p$, при $m_p < \infty$ и $m_p = \infty$ соответственно. Если χ содержит бесконечно много ненулевых элементов, то рассмотрим подкольцо $R_\chi = \left\langle 1, \bigoplus\limits_{p \in P} K_p \right\rangle_*$ кольца $\prod\limits_{p\in P} K_p$. Если все p-компоненты χ, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то рассмотрим кольца $K_\chi = K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$ и $R_\chi = Q \oplus K_\chi$. Заметим, что если $\chi = (\infty)$, то кольцо R_χ есть в точности кольцо псевдо-рациональных чисел.

Отметим, что независимо от А.А. Фомина, данный класс колец был рассмотрен П.А. Крыловом в [3].

Следующие свойства колец R_χ более или менее очевидны. Их доказательства можно найти в [2].

Свойства.

1) Элемент $r = (\alpha_p) \in \prod\limits_{p\in P} K_p$ принадлежит кольцу R_χ тогда и только тогда, когда для него найдется рациональное число $|r| = m/n$ такое, что $n\alpha_p = m$, почти при всех простых p.

2) Элементы вида $\varepsilon_p = (0, \dots, 0, 1_p, 0, \dots)$ являются идемпотентами кольца R_χ. Более того, любой идемпотент кольца R_χ имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}$ или $1 - \varepsilon$.

3) $T = \bigoplus\limits_{p\in P} \widehat{Z}_p$ является идеалом кольца R и состоит из всех таких $r \in R$, что $|r| = 0$.

Всюду далее, для произвольного псевдо-рационального числа r через $|r|$ будем обозначать рациональное число, определенное в свойстве 1, а через T будем обозначать идеал кольца R, определенный в свойстве 3.

Рассмотрим некоторые инварианты и свойства модулей над кольцом псевдо-рациональных чисел.

Определение 2. ([2]) *R-модуль M называется делимым, если его аддитивная группа – делимая без кручения. Если R-модуль не содержит делимых подмодулей, то он называется редуцированным.*

Теорема 1. ([2]) *Для произвольного R-модуля M справедливо:*
1. Модуль M либо редуцированный, либо содержит наибольший делимый подмодуль $divM$;
2. $divM = \{m \in M \mid tm = 0$ для любого $t \in T\}$;
3. $divM$ выделяется прямым слагаемым в M. ■

Пусть M – произвольный конечно порожденный R-модуль с системой образующих $\{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда, очевидно, что $\widehat{Z}_p$-модуль $M_p = \varepsilon_p M$ порождается элементами $\{\varepsilon_p x_1, \dots, \varepsilon_p x_n\}$. Конечно порожденный p-адический модуль M_p

представим в виде прямой суммы циклических $\widehat{Z}_p$-модулей:

$$M_p = \left\langle a_1 \right\rangle_{\widehat{Z}_p} \oplus \cdots \oplus \left\langle a_n \right\rangle_{\widehat{Z}_p},$$

где некоторые слагаемые могут быть нулевыми.

Циклический $\widehat{Z}_p$-модуль изоморфен или $Z/p^{k_{ip}}Z$, где k_{ip} – целое неотрицательное число, или $\widehat{Z}_p$. Следовательно, изоморфизм

$$M_p \cong Z(p^{k_{p1}}) \oplus \cdots \oplus Z(p^{k_{pt}}) \oplus \bigoplus_s \widehat{Z}_p,\ t+s=n$$

определяет следующую упорядоченную последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞

$$0 \leq k_{p1} \leq \cdots \leq k_{pn} \leq \infty, \tag{1}$$

где последние s членов есть символы ∞ $(0 \leq s \leq n)$. Последовательность (1) по всем простым p определяет последовательность типов $\delta_1 \leq \cdots \leq \delta_n$. Несколько первых типов могут быть нулевыми. Отбросив их, мы получим последовательность ненулевых типов

$$\tau_1 \leq \cdots \leq \tau_k. \tag{2}$$

Определение 3. ([2]) *Последовательность (2) называется типом Ричмана конечно порожденного R-модуля M, число k называется универсальным рангом M. Псевдо-рациональным рангом конечно порожденного R-модуля M называется $dim_Q\Big(M/TM\Big)$ – размерность фактормодуля M/TM (будем использовать обозначение $r^*(M)$), рассматриваемого в качестве векторного пространства над $Q \cong R/T$.*

Заметим, что определение А.А. Фомина для псевдо-рационального ранга обобщается и для не конечно порожденных R-модулей.

Свойства.

4) Если M – произвольный R-модуль, то множество

$$TM = \{tm \mid t \in T, m \in M\}$$

является подмодулем модуля M, причем $TM = \bigoplus_{p\in P} M_p$, где $M_p = \varepsilon_p M$.

5) $r^*(M/N) = r^*(M) - r^*(N)$.

Так как $T(M/N) = TM/TN$ и ${M/N}\Big/{TM/TN} \cong {M/TM}\Big/{N/TN}$, то

$$r^*(M/N) = dim_Q M/TM - dim_Q N/TN = r^*(M) - r^*(N).$$

В работах [2] и [6] описаны некоторые классы конечно порожденных R-модулей, например, R-модули псевдо-рационального ранга 0 и 1.

2 Матрицы p-отношений

Матрицы p-отношений группы были построены А.А. Фоминым, и практически все ниже следующее в этом разделе, в той или иной степени, – цитирование из работы [4].

Пусть G – группа без кручения конечного ранга n со свободной подгруппой $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$; r_p – p-ранг группы G, для каждого простого p. Тогда периодическая группа G/F имеет вид:

$$G/F = \bigoplus_{p \in P} \big[G/F\big]_p \cong \bigoplus_{p \in P} \Big[\bigoplus_{i=1}^{r_p} Z(p^{k_{ip}}) \oplus \bigoplus_{i=r_p+1}^{n} Z(p^{\infty})\Big]. \tag{3}$$

Определение 4. *Последовательность типов* $\big([(k_{1p})], \dots, [(k_{np})]\big)$*, где* k_{ip} *взяты из* (3)*, считая* $k_{ip} = \infty$*, при* $i > r_p$*, называется типом Ричмана группы* G*.*

Зафиксируем p, тогда для каждого из первых r_p циклических слагаемых в (3) существует набор целых чисел a_{ij}^p, где $j \in \{1, \dots, n\}$, таких что элемент

$$y_i^p + F = \frac{a_{i1}^p x_1 + \cdots + a_{in}^p x_n}{p^{k_{ip}}} + F$$

является порождающим этого слагаемого. Если $\alpha_{ij}^p = a_{ij}^p + p^{k_{ip}} Z \in Z/p^{k_{ip}} Z$, то для каждого $i \in \{1, \dots, r_p\}$ получили отношение в $Z/p^{k_{ip}}Z$-модуле $G/p^{k_{ip}}G$

$$\alpha_{i1}^p x_1 + \cdots + \alpha_{in}^p x_n = 0.$$

Для каждого из $n - r_p$ квазициклических слагаемых в (3) найдем множество таких образующих $\{y_i^p(k) + F \mid 1 \le k < \infty\}$, что

$$p y_i^p(1) + F = 0 \ \ \& \ \ p y_i^p(k) + F = y_i^p(k-1) + F.$$

Как и выше, каждое $y_i^p(k)$ определяет отношение $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^p x_j = 0$ в $G/p^k G$. Для каждого фиксированного j последовательность $\big(\alpha_{ij}^p(k)\big)_k$ определяет целое p-адическое число α_{ij}^p. Таким образом, для каждого $i \in \{r_p + 1, \dots, n\}$ получили p-адическое отношение $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^p x_j = 0$ в $\widehat{Z}_p$-модуле $\widehat{G}_p$, где $\widehat{G}_p$ – p-адическое пополнение группы G.

Для каждого простого p запишем множество p-отношений в матричной форме: $M_G^p X = 0$. Здесь X – $(n \times 1)$-столбец с координатами $x_1, \dots, x_n$, а M_G^p есть $(n \times n)$-матрица с i-ой строкой, состоящей из элементов кольца $Z/p^{k_{ip}}Z$, при $i \le r_p$, или из элементов кольца $\widehat{Z}_p$, при $i > r_p$.

Таким образом, каждой группе G с фиксированным базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$ соответствует множество матриц p-отношений $\{M_G^p\}$. Обратно, имея множество $(n \times n)$-матриц $\{M^p\}$, таких что каждая строка каждой матрицы M^p состоит из элементов одного и того же кольца $\left(Z/p^{k_{ip}}Z \text{ или } \widehat{Z}_p\right)$, мы можем обратить наши рассуждения и получить группу без кручения ранга n. Причем группа, построенная с помощью множества матриц $\{M_G^p\}$, будет в точности G.

Теорема 2. ([4]) *Пусть G – произвольная группа без кручения конечного ранга, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ – ее максимальная линейно независимая система, H – группа без кручения, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ – ее произвольные элементы. Тогда гомоморфизм $f : G \to H$, такой что $f(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$, существует тогда и только тогда, когда $M_G^p \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$, для всех простых p.* $\blacksquare$

3 Категория $\mathcal{F}$

В работе [5] А.А. Фомин построил категорию $\mathcal{F}$, двойственную категории $\mathcal{QTF}$ (абелевых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов). Рассмотрим эту категорию и алгоритм построения двойственных объектов.

Определение 5. ([5]) *Квазигомоморфизмами модулей $M_1 \to M_2$ над кольцом псевдо-рациональных чисел называются элементы из $Q \otimes Hom_R(M_1, M_2)$. Обратимые квазигомоморфизмы называются квазиизоморфизмами.*

Определение 6. ([5]) *Объектами категории $\mathcal{F}$ являются свободные группы конечного ранга, порождающие R-модули. Т. е., если $F \subset M$ есть свободная подгруппа конечного ранга аддитивной группы R-модуля M, то вложение $F \to \left\langle F \right\rangle_R$ является объектом категории $\mathcal{F}$. Морфизмом из одного объекта данной категории $F \to M$ в другой $F_1 \to M_1$ является пара (f, φ), состоящая из квазигомоморфизма $f : F \to F_1$ и R-квазигомоморфизма $\varphi : K \to K_1$, где $K = M/divM$ и $K_1 = M_1/divM_1$, таких, что следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K \\ \downarrow f & & & & \downarrow \varphi \\ F_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & K_1 \end{array} \quad ,$$

$M \longrightarrow K$ и $M_1 \longrightarrow K_1$ – естественные R-гомоморфизмы.

Пусть G – произвольная группа без кручения конечного ранга, с полной свободной подгруппой $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$. Рассмотрим множество матриц p-отношений группы G.

$$M_G^p = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p \ldots \alpha_{1n}^p \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}^p \ldots \alpha_{nn}^p \end{pmatrix} \tag{4}$$

Пусть

$$y_1 = \Big((\alpha_{11}^p)_{p\in P}, \dots, (\alpha_{n1}^p)_{p\in P}\Big), \dots, y_n = \Big((\alpha_{1n}^p)_{p\in P}, \dots, (\alpha_{nn}^p)_{p\in P}\Big). \tag{5}$$

Если группа G коредуцированная (не содержит свободных прямых слагаемых), то объектом в категории $\mathcal{F}$, двойственным к G, будет

$$< y_1, \dots, y_n > \to < y_1, \dots, y_n >_R .$$

В противном случае, $G = F \oplus H$, где F – свободная группа ранга $k \leq n$, а H – коредуцированная группа. Объектом, двойственным группе F, будет $< y_1, \dots, y_k > \to < y_1, \dots, y_k >_R$, где $< y_1, \dots, y_k >_R \doteq \bigoplus\limits_{i=1}^{k} Qy_i$. Тогда, если $< y_{k+1}, \dots, y_n > \to < y_{k+1}, \dots, y_n >_R$ – объект категории $\mathcal{F}$, двойственный группе H, то объектом, двойственным группе G будет

$$< y_1, \dots, y_k > \oplus < y_{k+1}, \dots, y_n > \to < y_1, \dots, y_k >_R \oplus < y_{k+1}, \dots, y_n >_R .$$

Если M – конечно порожденный R-модуль, то $\varepsilon_p M$ – конечно порожденный $\widehat{Z}_p$-модуль. Следовательно, $\varepsilon_p M \cong K_{1p} \oplus \dots \oplus K_{np}$, где $K_{ip} \cong Z/p^{k_i}Z$ или $K_{ip} \cong \widehat{Z}_p$. Тогда каждый порождающий R-модуля M представим в виде $y_i = \Big((\alpha_{1i}^p), \dots, (\alpha_{ni}^p)\Big)$. Значит, если мы обратим выше приведенную конструкцию, то для каждого объекта категории $\mathcal{F}$ получим множество матриц p-отношений вида (4), т. е. двойственную группу.

Заметим, что в общем случае, если $< x_1^*, \dots, x_n^* > \to < x_1^*, \dots, x_n^* >_R$ – объект, двойственный группе G, то можно считать, что

$$y_1 = x_1^* + divM, \dots, y_n = x_n^* + divM,$$

где $M =< x_1^*, \dots, x_n^* >_R$, а $y_1, \dots, y_n$ – система элементов вида (5).

По двойственности, каждой группе без кручения G конечного ранга соответствует объект $F \to M$ категории $\mathcal{F}$, где $M = \langle F \rangle_R$. R-модуль $K = M/divM$ будем называть *псевдо-рациональным типом* группы G и обозначать $\mathcal{R}(G)$. Тогда под псевдо-рациональным рангом группы G будем понимать псевдо-рациональный ранг ее псевдо-рационального типа. Данные определения несколько отличаются от аналогичных в [5]. Заметим также, что ранг группы F (его имеет смысл называть рангом объекта $F \to M$) совпадает с рангом группы G.

Теорема 3. ([5]) *Тип Ричмана группы без кручения G конечного ранга совпадает с типом Ричмана R-модуля $\mathcal{R}(G)$.* ■

4 Модуль псевдо-рациональных отношений

Определение 7. *Пусть $F \to M$ – произвольный объект из категории $\mathcal{F}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – некоторый базис группы F, тогда множество*

$$\Delta M_X = \{(r_1, \dots, r_n) \mid r_1, \dots, r_n \in R \;\&\; r_1x_1 + \dots + r_nx_n \in divM\},$$

очевидно, являющееся R-модулем, называется модулем псевдо-рациональных отношений объекта $F \to M$.

Из определения следует, что строение модуля псевдо-рациональных отношений зависит от выбора базиса группы F. Если $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – другой базис группы F, то $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)A$, где $A \in SL(n, Z)$. Не трудно показать, что в этом случае $\Delta M_X = (\Delta M_Y)\, A^t$. В частности, отсюда следует, что любые два модуля псевдо-рациональных отношений одного и того же объекта изоморфны. Далее, если не будет особой необходимости, модуль псевдо-рациональных отношений будем обозначать просто ΔM, подразумевая, что он построен на произвольном базисе. Данная конструкция вводится в [7], там же приводится основная теорема этого раздела.

Теорема 4. *Если G – группа, двойственная объекту $F \to M$, то*

$$Hom(G, R) \cong \Delta M,$$

где R – аддитивная группа кольца псевдо-рациональных чисел.

Доказательство. Пусть $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$ – некоторая полная свободная подгруппа группы G. Рассмотрим множество матриц p-отношений $\{M_G^p\}$, построенных на этой подгруппе. Пусть φ – произвольный элемент группы $Hom(G, R)$, и пусть $\varphi(x_1) = r_1, \dots, \varphi(x_n) = r_n$. По теореме 2

$$M_G^p \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

для любого простого p. Если $M_G^p = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^p \dots \alpha_{1n}^p \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}^p \dots \alpha_{nn}^p \end{pmatrix}$, то (6) равносильно системе

$$\begin{cases} r_1\alpha_{11}^p + \dots + r_n\alpha_{1n}^p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_1\alpha_{n1}^p + \dots + r_n\alpha_{nn}^p = 0 \end{cases},$$

а последняя система равносильна равенству

$$r_1\Big((\alpha_{11}^p), \dots, (\alpha_{n1}^p)\Big) + \dots + r_n\Big((\alpha_{1n}^p), \dots, (\alpha_{nn}^p)\Big) = 0.$$

Тогда, если $X = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ – базис группы F, двойственный $\{x_1, \dots, x_n\}$, то, учитывая (5),

$$r_1(x_1^* + divM) + \dots + r_n(x_n^* + divM) = 0,$$

т. е. $r_1x_1^* + \dots + r_nx_n^* \in divM$ и $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$.

Рассмотрим отображение $\Phi : Hom(G, R) \to \Delta M_X$ по закону:

$$\Phi(\varphi) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)).$$

Очевидно, что Φ задано корректно. Покажем, что Φ – инъекция. Предположим, что $\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2)$, т. е. $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1), \dots, \varphi_1(x_n) = \varphi_2(x_n)$. Если g – произвольный элемент группы G, то $mg = m_1x_1 + \dots + m_nx_n$, при некотором натуральном m, значит,

$$\varphi_1(mg) = \varphi_1(m_1x_1) + \dots + \varphi_1(m_nx_n) = \varphi_2(m_1x_1) + \dots + \varphi_2(m_nx_n) = \varphi_2(mg).$$

Тогда $m(\varphi_1(g) - \varphi_2(g)) = 0$. Но в R нет элементов конечного порядка, следовательно, $\varphi_1(g) - \varphi_2(g) = 0$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$.

Покажем, что Φ – сюръекция. Пусть $(r_1, \dots, r_n)$ – произвольный элемент из ΔM_X. Как показано выше, условие $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M_X$ равносильно тому, что $M_G^p \begin{pmatrix} r_1 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix} = 0$, а, следовательно, по теореме 2 существует такой гомоморфизм $\varphi \in Hom(G, R)$, что $\varphi(x_1) = r_1, \dots, \varphi(x_n) = r_n$. Значит, $\Phi(\varphi) = (r_1, \dots, r_n)$.

Таким образом, получили, что Φ – биекция.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in Hom(G, R)$ и $r \in R$, тогда

$$\Phi(\varphi_1 + \varphi_2) = ((\varphi_1 + \varphi_2)(x_1), \dots, (\varphi_1 + \varphi_2)(x_n)) =$$

$$= (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_n)) + (\varphi_2(x_1), \dots, \varphi_2(x_n)) = \Phi(\varphi_1) + \Phi(\varphi_2),$$

и

$$\Phi(r\varphi_1) = (r\varphi_1(x_1), \dots, r\varphi_1(x_n)) = r(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_n)) = r\Phi(\varphi_1).$$

Таким образом, получили, что Φ – гомоморфизм, следовательно, Φ – изоморфизм. ■

Данная теорема дает нам право говорить о модуле псевдо-рациональных отношений группы G. Под последним, будем понимать R-модуль $Hom(G, R)$.

5 Псевдо-рациональный ранг группы без кручения

Всюду в данном разделе мы будем иметь дело только с группами без кручения конечного ранга, поэтому, для простоты, последние будем называть просто группами.

Непосредственно из определения псевдо-рационального ранга группы G следует, что $r(G) \geq r^*(G)$. Возникает вопрос: $<$При каких условиях $r(G) = r^*(G)$?$>$ На него дает ответ следующая теорема.

Теорема 5. $r(G) = r^*(G) \Leftrightarrow Hom(G, R) = Hom(G, T)$.

Доказательство. Рассмотрим объект $F \to M$ категории $\mathcal{F}$, двойственный группе G. Пусть $F =< x_1, \dots, x_n >$. Предположим, что $r(G) = r^*(G)$. Тогда элементы $x_1 + TM, \dots, x_n + TM$ – независимы над Q и R-модуль M – редуцированный.

Пусть $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta M$, т. е. $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0$, тогда

$$|r_1| x_1 + \dots + |r_n| x_n + TM = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $|r_1| = \dots = |r_n| = 0$, т. е. $r_1, \dots, r_n \in T$. Отсюда следует, что $Hom(G, R) = Hom(G, T)$.

Пусть $Hom(G, R) = Hom(G, T)$. Равенство $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0$ верно тогда и только тогда, когда все r_i, при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, лежат в T. Предположим, что $r(G) \neq r^*(G)$, тогда элементы $x_1, \dots, x_n$ – зависимы по модулю TM. Значит, найдутся такие $s_j \in R$, что

$$x_{i_1} = \sum_{j=2}^{n} s_j x_{i_j} + t, \ t \in TM.$$

Возьмем идемпотент $(1 - \varepsilon) \in R$, такой, что $(1 - \varepsilon) t = 0$, тогда

$$(1 - \varepsilon) x_{i_1} - \sum_{j=2}^{n} (1 - \varepsilon) s_j x_{i_j} = 0.$$

Но $(1 - \varepsilon) \notin T$, получили противоречие. Значит, $r(G) = r^*(G)$. ■

Очевидно, что $Hom(G, R) = 0$ тогда и только тогда, когда G – делимая группа и $Hom(G, R) \cong R^{r(G)}$ тогда и только тогда, когда G – свободная группа. Далее опишем все такие группы G, у которых $Hom(G, R) \cong \bigoplus\limits_{p \in P} \bigoplus\limits_{r(G)} \widehat{Z}_p$, но сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если G – коредуцированная локально свободная группа, то*

$$r^*(G) = r(G).$$

Доказательство. Пусть G – редуцированная локально свободная группа, $F \to M$ – объект категории $\mathcal{F}$ ей двойственный и $\{x_1, \dots, x_n\}$ – базис группы F. Рассмотрим комбинацию $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0$, где $r_1, \dots, r_n \in R$. Если

$$|r_1| = \frac{m_1}{k_1}, \dots, |r_n| = \frac{m_n}{k_n},$$

то $m_1 x_1 + \dots + m_n x_n = t \in TM$. Но M – модуль локально свободного типа Ричмана, следовательно, $TM = \bigoplus\limits_{p \in P} M_p$ – его периодическая часть. Тогда найдется такое $m \in N$, что

$$(m m_1) x_1 + \dots + (m m_n) x_n = 0.$$

Так как система $x_1, \dots, x_n$ независимая, то из последнего равенства следует

$$mm_1 = \dots = mm_n = 0 \text{ и } m_1 = \dots = m_n = 0,$$

а значит, $|r_1| = \dots = |r_n| = 0$. Таким образом, элементы $x_1, \dots, x_n$ независимы по модулю TM и $r^*(G) = r^*(M) = n = r(G)$. ■

Теорема 6. *Для группы без кручения G следующие условия равносильны:*

1. *G – редуцированная локально свободная группа;*
2. *$Hom(G, R) \cong \bigoplus\limits_{p \in P} \bigoplus\limits_{r(G)} \widehat{Z}_p$;*
3. *$r(G) = r^*(G) = r_p(G)$ при любом $p \in P$.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобится известный из [1] изоморфизм

$$Hom(G, \widehat{Z}_p) \cong \bigoplus_{r_p(G)} \widehat{Z}_p, \tag{7}$$

где G – группа без кручения конечного ранга.

1. $\Rightarrow$ 2. Пусть G – редуцированная локально свободная группа, тогда из теоремы 5, леммы 1 и (7) следует

$$Hom(G, R) = Hom(G, T) \cong \bigoplus_{p \in P} Hom(G, \widehat{Z}_p) \cong \bigoplus_{p \in P} \bigoplus_{r_p(G)} \widehat{Z}_p.$$

Тогда, учитывая (3), $Hom(G, R) \cong \bigoplus\limits_{p \in P} \bigoplus\limits_{r(G)} \widehat{Z}_p$.

2. $\Rightarrow$ 3. Если $Hom(G, R) \cong \bigoplus\limits_{p \in P} \bigoplus\limits_{r(G)} \widehat{Z}_p$, то $Hom(G, R) = Hom(G, T)$, и значит, $r_p(G) = r(G)$ при любом простом p, т.е. $r(G) = r^*(G) = r_p(G)$ при любом $p \in P$.

3. $\Rightarrow$ 1. Если $r(G) = r^*(G)$, то $Hom(G, R) = Hom(G, T)$, и следовательно, G не может иметь свободных прямых слагаемых, т.е. G – коредуцированная. А если $r(G) = r_p(G)$ при любом $p \in P$, то согласно (3), G – локально свободная группа. ■

Использование определения для вычисления псевдо-рационального ранга группы довольно сложно и трудоемко, поэтому хотелось бы иметь более простой способ его нахождения. Именно этому и посвящена следующая теорема.

Теорема 7. *Если G – группа без кручения конечного ранга, то*

$$r^*(G) = r(G) - r^* Hom(G, R)$$

где $r^* Hom(G, R)$ – псевдо-рациональный ранг R-модуля $Hom(G, R)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу без кручения G конечного ранга n. Пусть $F \to M$ – объект категории $\mathcal{F}$, двойственный группе G. Если $F =< x_1, \dots, x_n >$, то рассмотрим R-модуль $K = M/divM$. Он порождается элементами $\{z_1, \dots, z_n\}$, где $z_1 = x_1 + divM, \dots, z_n = x_n + divM$.

Отображение $\varphi : R^n \to K$, по закону $\varphi(r_1, \dots, r_n) = r_1z_1 + \dots + r_nz_n$, очевидно, является эпиморфизмом, причем

$$\ker \varphi = \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n | r_1z_1 + \dots + r_nz_n = 0\} =$$

$$= \{(r_1, \dots, r_n) \in R^n | r_1x_1 + \dots + r_nx_n \in divM\} = \Delta M_X.$$

Таким образом, $K \cong R^n/\Delta M_X$, а, значит, $r^*(K) = r^*(R^n) - r^*(\Delta M_X)$. Тогда, учитывая результат теоремы 4 и то, что $r^*(K) = r^*(G)$, $r^*(R^n) = n = r(G)$, получаем, что $r^*(G) = r(G) - r^*\Big(Hom(G,R)\Big)$. ■

6 Факторно делимые смешанные группы

Определение 8. ([5]) *Группа G называется факторно делимой, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу конечного ранга F, что G/F – периодическая делимая группа.*

Свободную подгруппу F из определения 8 будем называть фундаментальной подгруппой группы G, а любой ее базис – фундаментальной системой группы.

А.А. Фоминым в [5] доказана эквивалентность категории $\mathcal{QD}$ – факторно делимых смешанных групп с квазигомоморфизмами и категории $\mathcal{F}$. Причем, если $F \to < F >_R$ – объект категории $\mathcal{F}$, то эквивалентная ему группа G находится как сервантная оболочка $< F >_*$ в аддитивной группе R-модуля $< F >_R$. Как и для групп без кручения конечного ранга, для факторно делимых смешанных групп Фоминым определен псевдо-рациональный тип: $\mathcal{R}(G) =< F >_R$. Под псевдо-рациональным рангом смешанной факторно делимой группы G будем понимать псевдо-рациональный ранг группы без кручения конечного ранга $G/T(G)$.

Пусть G – произвольная смешанная факторно делимая группа, $T(G)$ – ее периодическая часть. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to T(G) \to G \to G/T(G) \to 0,$$

она индуцирует точную последовательность

$$0 \to Hom(G/T(G), R) \to Hom(G, R) \to Hom(T(G), R).$$

Так как $Hom(T(G), R) = 0$, то $Hom(G, R) \cong Hom(G/T(G), R)$, тогда, учитывая теорему 7, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Если G – смешанная факторно делимая группа, то*

$$r^*(G) = r(G) - r^*Hom(G, R)$$

где $r^*\Big(Hom(G, R)\Big)$ *– псевдо-рациональный ранг R-модуля $Hom(G, R)$.* ■

Теорема 9. ([5]) *Если H – редуцированный R-модуль, или G – делимый R-модуль, то*

$$Hom_Z(G, H) = Hom_R(G, H). \ ■$$

Лемма 2. *Пусть G и H – некоторые факторно делимые смешанные группы, причем H – редуцированная группа, или G – делимая. $\bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$ – фундаментальная подгруппа группы G, $\varphi : G \to H$ – произвольный гомоморфизм, тогда, если*

$$g = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in G, \ r_1, \ldots, r_n \in R,$$

то $\varphi(g) = r_1\varphi(x_1) + \cdots + r_n\varphi(x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1-ый случай. G и H – редуцированные группы. Пусть $\hat{G}$ и $\hat{H}$ – Z-адические пополнения групп G и H, тогда существует единственный гомоморфизм φ^* такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \downarrow \mu & & \downarrow \nu \\ \hat{G} & \xrightarrow{\varphi^*} & \hat{H}. \end{array}$$

Здесь отображения μ и ν являются мономорфизмами, поэтому можно считать, что $G \subset \hat{G}$ и $H \subset \hat{H}$. Так как $\hat{G}$ и $\hat{H}$ – редуцированные R-модули, то, применив теорему 9, получим:

$$\varphi(g) = \varphi(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) = \varphi^*(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) =$$

$$= r_1\varphi^*(x_1) + \cdots + r_n\varphi^*(x_n) = r_1\varphi(x_1) + \cdots + r_n\varphi(x_n).$$

2-ой случай. G и H – делимые группы без кручения, тогда они являются делимыми R-модулями, и следовательно, по теореме 9

$$\varphi(g) = \varphi(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) = r_1\varphi(x_1) + \cdots + r_n\varphi(x_n).$$

3-ий случай. G – делимая группа и $H = D \oplus H_1$, где D – делимая группа без кручения, а H_1 – редуцированная группа. Так как $Hom(G, H) = Hom(G, D)$, то данный случай сводится к случаю 2.

4-ый случай. H – редуцированная группа и $G = D \oplus G_1$, где D – делимая группа без кручения, а G_1 – редуцированная. Так как $Hom(G, H) = Hom(G_1, H)$, то данный случай сводится к случаю 1. ■

Пусть G – произвольная факторно делимая смешанная группа, $M = \mathcal{R}(G)$ – псевдо-рациональный тип группы G и $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – произвольная конечная система элементов из G. Будем считать, что $G \subseteq M$. Тогда рассмотрим два множества:

$$\nabla G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in G\},$$

$$\Delta G_X = \{(r_1, \ldots, r_n) \in R^n \mid r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in divG\}.$$

Очевидно, что ∇G_X является группой по сложению, а ΔG_X является R-модулем. В случаи, если X – фундаментальная система в G, модуль ΔG_X будем называть модулем псевдо-рациональных отношений группы G.

Лемма 3. *Пусть G и H – произвольные факторно делимые смешанные группы. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – фундаментальная система элементов группы G, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ – произвольная система элементов группы H и $\Delta G_X \subseteq \Delta H_Y$, то $\nabla G_X \subseteq \nabla H_Y$.*

Доказательство. Пусть $(r_1, \ldots, r_n) \in \nabla G_X$, т.е.

$$g = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \in G. \tag{8}$$

Подгруппа $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$ фундаментальная в группе G, следовательно, G/F – делимая группа. Тогда найдется такое $m \in N$, что

$$mg = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n \in F. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$(mr_1 - m_1)x_1 + \cdots + (mr_n - m_n)x_n = 0$$

т.е. $((mr_1 - m_1), \ldots, (mr_n - m_n)) \in \Delta G_X$. Так как $\Delta G_X \subseteq \Delta H_Y$, то

$$(mr_1 - m_1)y_1 + \cdots + (mr_n - m_n)y_n = d \in divH,$$

следовательно,

$$m(r_1y_1 + \cdots + r_ny_n) = m_1y_1 + \cdots + m_ny_n + d = h \in H.$$

Рассмотрим $\mathcal{R}(H)$ – псевдо-рациональный тип группы H. Как показано в [5],

$$\mathcal{R}(H) =< H >_R =< F_1 >_R, \tag{10}$$

где F_1 – фундаментальная подгруппа группы H, а

$$H =< F_1 >_* \subseteq \mathcal{R}(H). \tag{11}$$

Так как F_1 – фундаментальная подгруппа группы H, то $lh \in F_1$ при некотором $l \in N$, а тогда

$$lm(r_1y_1 + \cdots + r_ny_n) = lh \in F_1. \tag{12}$$

Из (10) следует, что $r_1y_1 + \cdots + r_ny_n \in \mathcal{R}(H)$, а учитывая (11) и (12) получаем, что $r_1y_1 + \cdots + r_ny_n \in H$. Таким образом, $(r_1, \ldots, r_n) \in \nabla H_Y$ и $\nabla G_X \subseteq \nabla H_Y$. ■

Теорема 10. *Пусть G – произвольная факторно делимая смешанная группа, $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Zx_i$ – ее фундаментальная подгруппа, H – факторно делимая смешанная группа, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ – ее произвольные элементы. Тогда гомоморфизм $f : G \to H$, такой что $f(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le n)$, существует тогда и только тогда, когда $\Delta G_X \subseteq \Delta H_Y$.*

Доказательство. Покажем необходимость условий. Рассмотрим гомоморфизм $f : G \to H$, такой что $f(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le n)$. Пусть $(r_1, \dots, r_n) \in \Delta G_X$, т. е. $r_1x_1 + \dots + r_nx_n \in divG$ и $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in Hom(G, divH)$, $f_2 \in Hom(G, H/divH)$. По лемме 2

$$f_1(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r_1f_1(x_1) + \ldots + r_nf_1(x_n) = 0.$$

А так как $f_2(x_1), \ldots, f_2(x_n) \in divH$, то $r_1f_2(x_2) + \ldots + r_nf_2(x_n) \in divH$, следовательно,

$$[r_1f_1(x_1) + \ldots + r_nf_1(x_n)] + [r_1f_2(x_2) + \ldots + r_nf_2(x_n)] =$$

$$= r_1[f_1(x_1) + f_2(x_1)] + \ldots + r_n[f_1(x_n) + f_2(x_n)] = r_1f(x_1) + \ldots + r_nf(x_n) =$$
$$= r_1y_1 + \ldots + r_ny_n \in divH.$$

Таким образом, $\Delta G_X \subseteq \Delta H_Y$.

Покажем достаточность условий теоремы. Пусть $\Delta G_X \subseteq \Delta H_Y$, построим гомоморфизм $f : G \to H$, такой, что $f(x_i) = y_i$ $(1 \le i \le n)$.

Так как $H = H_1 \oplus divH$, где H_1 – редуцированная группа, то элементы из системы Y можно представить в виде

$$y_1 = h_1 + d_1, \dots, y_n = h_n + d_n, \text{ где } h_i \in H_1, d_i \in divH.$$

Рассмотрим соответствие $f_1 : G \to H_1$, по закону

$$f_1(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) = r_1h_1 + \dots + r_nh_n.$$

Пусть $g = r_1x_1 + \dots + r_nx_n = s_1x_1 + \dots + s_nx_n$ – два произвольных разложения элемента $g \in G$. Тогда

$$(r_1 - s_1)x_1 + \dots + (r_n - s_n)x_n = 0,$$

т.е. $((r_1 - s_1), \dots, (r_n - s_n)) \in \Delta G_X$. Не трудно заметить, что $\Delta H_Y = \Delta H_{1T}$, где $T = \{h_1, \dots, h_n\}$. Тогда из условия теоремы следует, что

$$(r_1 - s_1)h_1 + \dots + (r_n - s_n)h_n \in divH_1,$$

но $divH_1 = 0$, следовательно,

$$f_1(r_1x_1 + \dots + r_nx_n) = r_1h_1 + \dots + r_nh_n = s_1h_1 + \dots + s_nh_n = f_1(s_1x_1 + \dots + s_nx_n).$$

Таким образом, f_1 – отображение. Очевидно, что f_1 сохраняет операцию, т.е. f_1 – гомоморфизм.

Рассмотрим свободную группу $F = \bigoplus_{i=1}^{n} Zx_i$. Отображение

$$x_1 \mapsto d_1, \dots, x_n \mapsto d_n, \tag{13}$$

в силу проективности группы F, продолжается до гомоморфизма $f_2' : F \to divH$. Группа $divH$ инъективная, следовательно, для диаграммы с точной строкой

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d, "f_2'"'] & G \arrow[dl, dashed, "f_2"] \\ & divH & \end{tikzcd}$$

существует гомоморфизм $f_2 : G \to divH$, превращающий ее в коммутативную. Причем, в силу условий (13),

$$f_2(x_1) = d_1, \dots, f_2(x_n) = d_n.$$

Рассмотрим гомоморфизм $f = f_1 \oplus f_2$ из группы G в группу H. Так как

$$f(x_i) = f_1(x_i) + f_2(x_i) = h_i + d_i = y_i \;\; (1 \le i \le n),$$

то f – искомый гомоморфизм. ■

Следствие 1. *Пусть G и H – произвольные факторно делимые смешанные группы, X и Y – максимальные независимые системы в G и H соответственно, тогда если $\Delta G_X = \Delta H_Y$, то $G \cong H$.* ■

Список литературы

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Т. 1, 2. М.: Мир, 1974, 1977.

[2] Fomin A.A. Some mixed abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers//in the book: Proceedings of the Dublin's Conference on Abelian Groups. 1999. P. 87 – 100.

[3] Крылов П.А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов//Фундаментальная и прикладная математика. Т. 6. №3. 2000. С. 793 – 812.

[4] Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups//Proc. Amer. Math. Soc. V. 126. 1998. P. 45 – 52.

[5] Fomin A.A. Quotient divisible mixed groups//Contempt. Math. V. 273. 2001. P. 117 – 128.

[6] Царев А.В. Конечно порожденные R-модули//Науч. труды мат. факультета МПГУ. М.: Прометей, 2000. С. 285 – 289.

[7] Царев А.В. Модуль псевдо-рациональных отношений группы// Чебышевский сборник. Т. 3. В. 1. Тула, 2002. С. 120–134.