Об изоморфизме кольца кольцу эндоморфизмов абелевой группы

В. М. Мисяков

УДК 512.541+512.541.52+512.552.13+512.552.16

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, кольцо эндоморфизмов, абелева группа.

Аннотация

В статье показываются необходимые и достаточные условия, при которых из изоморфизма колец эндоморфизмов аддитивных групп произвольных ассоциативных колец с единицей следует изоморфизм этих колец. Дается критерий для абелевых групп из некоторого класса, показывающий когда из изоморфизма колец эндоморфизмов групп следует изоморфизм самих групп этого класса. Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых произвольное кольцо является кольцом эндоморфизмов некоторой абелевой группы, что является решением проблемы 84 в [4].

В данной работе предполагается, что кольца являются ассоциативными и имеют единицу. Если R – кольцо (абелева группа), то через $E(R)$ будем обозначать кольцо эндоморфизмов (абелевой группы) его аддитивной группы, через R^+ – аддитивную группу кольца R, а через R^l – подкольцо левых умножений кольца $E(R)$.

В своей монографии [4] Л. Фукс отмечает, что если абелевы группы изоморфны, то будут изоморфны и их кольца эндоморфизмов, обратное не всегда верно. Отсюда, в частности, вытекает что из изоморфизма колец следует изоморфизм колец эндоморфизмов их аддитивных групп. Возникает задача нахождения необходимых и достаточных условий, при которых из изоморфизма колец эндоморфизмов аддитивных групп колец следует изоморфизм самих колец. Данная задача решается в теореме 2. Заметим также, что если R – кольцо с единицей, то кольцо R изоморфно кольцу левых умножений R^l лемма 3.7.3 [1].

Лемма 1. Пусть в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\alpha} & R^l & \xrightarrow{i} & E(R) \\ \beta\big\downarrow & & \big\downarrow\delta & & \big\downarrow\beta^* \\ S & \xrightarrow{\gamma} & S^l & \xrightarrow{i'} & E(S) \end{array} \qquad (*)$$

α, γ – кольцевые изоморфизмы; i, i' – тождественные вложения колец, тогда справедливы следующие условия:

1) если β – изоморфизм колец R и S, то существуют изоморфизмы δ и β^*, делающие диаграмму $(*)$ коммутативной;

2) если δ – изоморфизм колец R^l и S^l, то существуют изоморфизмы β и β^*, делающие диаграмму $(*)$ коммутативной.

Доказательство. 1) Пусть $\beta : R \to S$ – изоморфизм колец, тогда изоморфизмы α, β, γ индуцируют изоморфизм $\delta : R^l \to S^l$ такой, что $\delta = \gamma\beta\alpha^{-1}$. Тогда для любого $r \in R$ имеем: $\delta(\alpha(r)) = \delta(r^l) = \gamma(\beta(\alpha^{-1}(r^l))) = \gamma(\beta(r)) = \gamma(s) = s^l$ и, с другой стороны, $\gamma(\beta(r)) = \gamma(s) = s^l$, то есть $\delta\alpha = \gamma\beta$. Поскольку из изоморфизма колец R и S следует изоморфизм их аддитивных групп, который, в свою очередь, влечет изоморфизм $\beta^* : E(R) \to E(S)$ такой, что $\beta^*(\psi) = \beta\psi\beta^{-1}$ для любого $\psi \in E(R)$ [4]. Пусть $r^l \in R^l$ и $\delta(r^l) = s^l$, тогда $\gamma(\beta(\alpha^{-1}(r^l))) = s^l$, $\beta(\alpha^{-1}(r^l)) = \gamma^{-1}(s^l)$, следовательно, $\beta(r) = s$. Покажем, что $\beta^*|_{R^l} = \delta$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Пусть $x \in S$, тогда $(\beta^*(r^l))(x) = \beta(r^l(\beta^{-1}(x))) = \beta(r^l(y)) = \beta(ry) = \beta(r)\beta(y) = sx = s^l(x)$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Поскольку равенство $\beta^*|_{R^l} = \delta$ показывает, что правый квадрат диаграммы $(*)$ коммутативен, то, следовательно, вся диаграмма $(*)$ коммутативна.

2) Пусть $\delta : R^l \to S^l$ – изоморфизм колец, тогда изоморфизмы α, δ, γ индуцируют изоморфизм $\beta : R \to S$ такой, что $\beta = \gamma^{-1}\delta\alpha$, делающий левый квадрат диаграммы $(*)$ коммутативным. Действительно, для любого $r \in R$ имеем: $\delta(\alpha(r)) = \delta(r^l) = s^l$ и, с другой стороны, $\gamma(\beta(r)) = \gamma(\gamma^{-1}(\delta(\alpha(r)))) = \delta(\alpha(r)) = s^l$, то есть $\delta\alpha = \gamma\beta$. Тогда существует изоморфизм $\beta^* : E(R) \to E(S)$ такой, что $\beta^*(\psi) = \beta\psi\beta^{-1}$ для любого $\psi \in E(R)$. Пусть $r^l \in R^l$ и $\delta(r^l) = s^l$, тогда $\beta(r) = \gamma^{-1}(\delta(\alpha(r))) = \gamma^{-1}(\delta(r^l)) = \gamma^{-1}(s^l) = s$, то есть $\beta(r) = s$. Покажем, что $\beta^*|_{R^l} = \delta$, то есть $\beta^*(r^l) = s^l$. Пусть $x \in S$, тогда $(\beta^*(r^l))(x) = (\beta r^l \beta^{-1})(x) = ((\gamma^{-1}\delta\alpha)r^l(\gamma^{-1}\delta\alpha)^{-1})(x) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1}\delta^{-1}\gamma)(x) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1}\delta^{-1})(x^l) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l\alpha^{-1})(y^l) = (\gamma^{-1}\delta\alpha r^l)(y) = (\gamma^{-1}\delta\alpha)(ry) = (\gamma^{-1}\delta\alpha)(r)(\gamma^{-1}\delta\alpha)(y) = (\gamma^{-1}\delta)(r^l)(\gamma^{-1}\delta)(y^l) = (\gamma^{-1})(s^l)(\gamma^{-1})(x^l) = sx = s^l(x)$. Таким образом,

правый квадрат в диаграмме $(*)$ коммутативен, что делает коммутативной всю диаграмму.

Теорема 2. Для колец R и S следующие условия эквивалентны:
1) $R \cong S$;
2) $R^l \cong S^l$;
3) $E(R) \overset{\beta}{\cong} E(S), E(R)/R^l \overset{\gamma}{\cong} E(S)/S^l$, причем $\gamma\pi = \pi^{'}\beta$, где $\pi : E(R) \to E(R)/R^l$, $\pi^{'} : E(S) \to E(S)/S^l$ – канонические эпиморфизмы и γ – групповой изоморфизм.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) следует из леммы 1. Покажем, что из 2)$\Rightarrow$ 3). Пусть $\alpha : R^l \to S^l$ – изоморфизм колец, тогда по лемме 1 существует изоморфизм $\beta : E(R) \to E(S)$ такой, что диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R^l & \xrightarrow{i} & E(R) & \xrightarrow{\pi} & E(R)/R^l & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & S^l & \xrightarrow{i^{'}} & E(S) & \xrightarrow{\pi^{'}} & E(S)/S^l & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (**)$$

коммутативна, где γ не задано; $i, i^{'}$ – тождественные вложения колец; $\pi, \pi^{'}$ – канонические эпиморфизмы групп. Тогда по предложению 3 [3] существует групповой изоморфизм γ такой, что правый квадрат диаграммы $(**)$ коммутативен, то есть $\gamma\pi = \pi^{'}\beta$.
3)$\Rightarrow$ 2). Рассмотрим коммутативную диаграмму $(**)$ с точными строками, где α не задано; $i, i^{'}$ – тождественные вложения колец; $\pi, \pi^{'}$ – канонические эпиморфизмы групп. Тогда по предложению 2 [3] существует групповой мономорфизм $\alpha : R^l \to S^l$ такой, что $i^{'}\alpha = \beta i$, то есть диаграмма $(**)$ является коммутативной. Поскольку $im\ \beta i \subseteq im\ i^{'}$, то $\alpha = (i^{'})^{-1}\beta i$. Так как $(i^{'})^{-1}, \beta, i$ – кольцевые гомоморфизмы, то α – кольцевой гомоморфизм. Покажем, что α – эпиморфизм. Поскольку β – эпиморфизм, то для произвольного $s \in S^l$ существует $b \in E(R)$ такой, что $i^{'}(s) = \beta(b)$. Тогда $0 = \pi^{'}(i^{'}(s)) = \pi^{'}(\beta(b)) = \gamma(\pi(b))$ и $\pi(b) \in Ker\ \gamma$. Так как γ – мономорфизм, то $\pi(b) = 0$ и $b \in Ker\ \pi = im\ i$. Следовательно, существует $r \in R^l$ такой, что $i(r) = b$. Тогда $\beta(i(r)) = \beta(b) = i^{'}(s)$ и, поэтому, $(i^{'})^{-1}(\beta(i(r))) = s$, то есть $\alpha(r) = s$. Таким образом, показано что α – кольцевой изоморфизм.

Рассматриваемый далее результат относится к так называемой теореме изоморфизма для колец эндоморфизмов, под которой понимается обычно теорема, утверждающая, что две группы, быть может из данного класса, изоморфны, если их кольца эндоморфизмов изоморфны [2]. Обозначим через K класс абелевых групп, на которых можно задать структуру кольца с единицей. Тогда для групп из этого класса справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. Для любых $A, B \in K$ следующие условия равносильны:
1) $A \cong B$;
2) $(A^l)^+ \cong (B^l)^+$;
3) $E(A) \overset{\beta}{\cong} E(B)$, $E(A)/(A^l)^+ \overset{\gamma}{\cong} E(B)/(B^l)^+$, причем $\gamma\pi = \pi^{'}\beta$, где $\pi : E(A) \to E(A)/(A^l)^+$, $\pi^{'} : E(B) \to E(B)/(B^l)^+$ – канонические эпиморфизмы.

В [4] Л. Фукс сформулировал проблему 84: найти критерии для различных типов колец, при которых эти кольца служат кольцами эндоморфизмов абелевых групп. В приведенном ниже утверждении решается данная проблема для произвольных ассоциативных колец с единицей.

Следствие 4. Для кольца R и абелевой группы A следующие условия равносильны:
1) $R \cong E(A)$;
2) $R^l \cong (E(A))^l$;
3) $E(R) \overset{\beta}{\cong} E(E(A))$, $E(R)/R^l \overset{\gamma}{\cong} E(E(A))/(E(A))^l$, причем $\gamma\pi = \pi^{'}\beta$, где $\pi : E(R) \to E(R)/R^l$, $\pi^{'} : E(E(A)) \to E(E(A))/(E(A))^l$ – канонические эпиморфизмы.

Если в следствии 4 вместо абелевой группы рассматривать ассоциативное кольцо A с единицей, то получим критерий, при котором кольцо R является кольцом эндоморфизмов аддитивной группы кольца A.

Литература

1. Ф. Каш, Модули и кольца, Мир, Москва (1981).
2. П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, Связи абелевых групп и

их колец эндоморфизмов, Томский государственный университет, Томск (2002).
3. Л. А. Скорняков, "Лекции по гомологической алгебре,"Мат. вестник, 5, №1, 71-113 (1968).
4. Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы. Том II, Мир, Москва (1977).